№2.

Вероятность - $\frac{\text{Все благоприятные случаи}}{\text{всевозможные случаи}}$

Благоприятных:- это кол-во чисел, у которых НОД с 2024 = 1 (т.е они взаимно просты)

Всевозможные случаи - кол-во чисел в отрезке [1; 2023] Их 2023

Найдем благоприятные случаи и посчитаем кол-во таких чисел!

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Т.е все числа в благоприятных случаях $\not\vdots 2, \not\vdots 11, \not\vdots 23$.

Посчитаем кол-во чисел $\not\vdots 2$ (среди данного отрезка). Это будут все нечет. числа

$\frac{2023}{2} = 1011$ (ост 1); 1012 чисел $\not\vdots 2$.

Из них есть 1) $\vdots 11, \not\vdots 23$; 2) $\not\vdots 11, \vdots 23$, 3) $\vdots 11, \vdots 23$

Все эти случаи неблагоприятные

1) чисел этого типа $\frac{1012}{11} - \frac{1012}{11 \cdot 23} = 92 - 4 = 88$.

все числа $\vdots 11$ все числа $\vdots 11$ и $\vdots 23$

2) чисел этого типа $\frac{1012}{23} - \frac{1012}{11 \cdot 23} = 44 - 4 = 40$

все числа $\vdots 23$ все числа $\vdots 11$ и $\vdots 23$.

3) чисел этого типа $\frac{1012}{11 \cdot 23} = 4$.

все числа $\vdots 11$ и $\vdots 23$

Вычитаем все эти кол-ва из кол-ва нечет. чисел. (чисел, $\not\vdots 2$)

$1012 - 4 - 40 - 88 = 880$ благоприятных случаев

Вероятность: $\frac{880}{2023}$

Ответ. $\frac{880}{2023}$

№3. (часть 1)

① Посчитаем кол-во квадратов, стороны которого лежат на линиях сетки квадрата 9×9.

квадратов ~~9~~ 1×1 будет 9·9 = 81
2×2 будет 8·8 = 64
3×3 будет 7×7 = 49
4×4 будет 6×6 = 36
5×5 будет 5×5 = 25
6×6 будет 4×4 = 16
7×7 будет 3×3 = 9
8×8 будет 2×2 = 4
9×9 будет 1×1 = 1

(т.к. квадрат n×n в строке разместить можно (10-n) вариантов и в столбце 10-n вариантов, тогда всего способов разместить его на доске $(10-n)^2$).

② Посчитаем кол-во квадратов, стороны которых НЕ лежат на сетке квадрата 9×9.

квадратов 1×1 ~~9×9~~ будет 8·8 = 64
2×2 ~~7×7~~ будет 6·6 = 36
3×3 будет 4·4 = 16
4×4 будет 2·2 = 4
~~5×5 будет 1~~
6×6
⋮
9×9 $\}$ будет 0.

№3 (часть 2)

(Т.к квадрат $n \times n$ можно разместить на доске НЕ по линиям сетки $(10-n\cdot 2)^2$ способами. Т.к его вершина по строке может расположиться $10-2n$ способами (Если от обоих концов сетки отступать по n вершин, иначе квадрат не поместится полностью в квадрат 9×9). Аналогично для вершины по столбцу.)

Тогда всего квадратов:

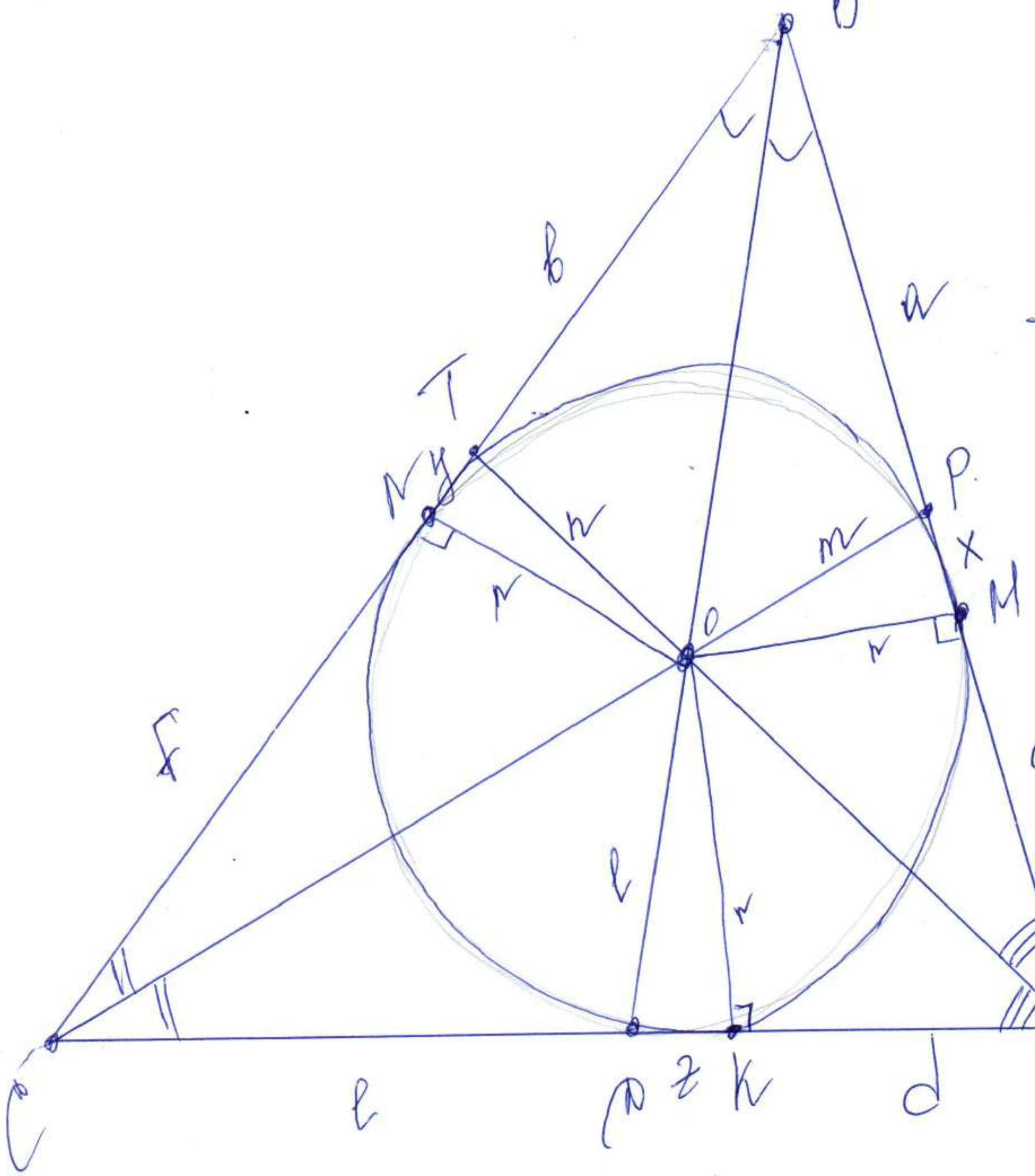
$81+64\cdot 2+49+36\cdot 2+25+16\cdot 2+9+4\cdot 2+1\cancel{2}=$
$=405$

Ответ: 405.

№5 (часть 1)

Дано:
$\triangle ABC$
AT - бисс $\angle A$
BD - бисс $\angle B$
CP - бисс $\angle C$
$P_{\triangle OPB} = P_{\triangle OBT} =$
$= P_{\triangle OTC} = P_{\triangle AOD} =$
$= P_{\triangle OCD} = P_{\triangle AOP}$

Док-ть:
$\triangle ABC$ прав.



Д-во:

1) т. O - пересечение бисс. $\triangle ABC$ ($CP \cap AT \cap BD$ в т. O)
Впишем окружность в $\triangle ABC$, её центр = т. O.
Пусть окружность касается сторон AB, BC, AC в точках M, N, K соответственно. Тогда
$OM \perp AB$; $ON \perp BC$; $OK \perp AC$.

$OM = ON = OK = r$.
$AM = c$; $MP = x$; $PB = a$, $BT = b$; $TN = y$; $NC = f$; $CD = e$; $KD = z$;
$AK = d$; $OP = m$; $OT = n$, $OD = L$

№5 (часть 2)

$AM = AK = c$; $MB = BN$; $NC = CK$

$d \overset{?}{=} c$

2) $AM = AK = c = d$

$P_{AOQ} = P_{AOP}$ (по усл.)

$c + x + m + AO = c + z + l + AO$

$c + x + m = c + z + l$

$x + m = z + l$

3) Рассмотрим $\triangle OMP$ и $\triangle OKQ$

$\angle OMP = \angle OKQ = 90^\circ$

$m^2 = x^2 + r^2$

$r^2 = m^2 - x^2$

$l^2 = r^2 + z^2$

$r^2 = l^2 - z^2$

$m^2 - x^2 = l^2 - z^2$

$\begin{cases} (m-x)(m+x) = (l-z)(l+z) \\ x + m = z + l \end{cases} \Rightarrow l - z = m - x$

$\begin{cases} l - z = m - x; \\ x + m = z + l; \end{cases}$ $\begin{cases} l - z = m - x \\ x - l = z - m \end{cases}$

$\Downarrow$

$x - z = z - x$

$2x = 2z$

$x = z \Rightarrow m = l$

№5 (часть 3)

4) $\triangle OMP = \triangle OKD$ (по 3 сторонам)

$\Rightarrow \angle MPO = \angle KDO = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPO = \angle CDO = 180 - \alpha$ (как смежн)

$\angle POB = \angle DOC$ (как верт.)

$PO = m = l = OD$ (из п. 3)

$\Rightarrow \triangle PBO = \triangle DCO$ по стороне и двум прилежащим к ней углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow DC = PB = a = e$; $BO = OC$ (как соответств. элементы)

$c + x = c + z =$ ~~AP~~ ($x = z$ из 3 п.)

$AP = AD$

$a = e$

$PB = DC$

$\Rightarrow AB = AC$

5) Рассмотрим $\triangle BOC$

$BO = OC$ (из п. 4) $\Rightarrow \triangle BOC$ р/б и ON высота, бисс и медиана $\Rightarrow BN = NC$

Но ON тож же бисс $\angle BOC$ (тк ~~бисс~~ ON в р/б $\triangle BOC$ лежит на бисс. р/б $\triangle ABC \Rightarrow ON$ тоже бисс $\triangle BOC$)

$\Rightarrow ON$ совпадает с ~~???~~ OT $\Rightarrow y = 0$; $n = h$

6) $f + n = l + l = e + z + n$

$l = z + n$

но в $\triangle DOK$ по неравенству $\triangle$ $l > z + n$

противоречие $\Rightarrow z = 0$

из п. 3 $x = z \Rightarrow x = z = 0 = y$ (из п. 5)

Получается все бисс. $\triangle ABC$ являются ещё его высотами $\Rightarrow \triangle ABC$ правильный

Чтд

№6 (часть 1)

① На доске 100×100 расположено 10 000 клеток. Значит игрокам предстоит сделать по 5000 ходов.

Первый игрок ставит в клетку единицу. Значит всего единиц 5 000. То-есть сумма всех строчек = 5000. И сумма всех столбцов аналогично = 5000.

② чет + чет = чет
нечет + чет = нечет
нечет + нечет = чет

Из этого можно сделать вывод о том, что при сложении четных слагаемых четность не меняют.

Так же заметим, что если нечет. слагаемых чет. кол-во, то сумма чет, а если их нечет. кол-во, то сумма нечет. (по соображениям четности)

5 000 - чет.

③ Получается, что если в таблице найдутся нечет. ~~строки~~ (сумма клеток нечет) строки (столбцов), то их всегда будет чет. кол-во. Поэтому 1 игроку достаточно для выигрыша следить за одной строкой (либо столбцом) тк если будет точно хотя бы 1 нечет строка (столбец), то среди других строк или столбцов найдется еще одна нечет. линия (тк тогда их должно получится ≥ 2.) и тогда 1 игрок выиграет) Также ходы 2 игрока четность в соответствующих строках или столбцах не меняют, тк он ставит нули, а 0 - чет. (из п.2)

④ Рассмотрим два последних хода, а точнее ситуацию на доске перед последними двумя ходами (имеется ввиду что 1 игроку останется 1 ход и 2 тоже 1 ход). Получается останется 2 пустые клетки и 1 игрок делает предпоследний ход (он делает нечет. ходы), а 2 игрок завершает игру

№6 (часть 2)

Пусть строки и столбцы пересекающие две последние пустые клетки будутем называть линиями.

Так вот, если среди этих линий (линий, которые пересекают 2 пустые клетки) будет хотя бы одна четная, то 1 игрок должен поставить 1 в ту клетку, которую пересекает эта чет. линия. Тем самым независимо от хода 2 игрока он обеспечит себе победу (он сделает эту линию нечет, и п 3) на доске найдется еще хотя бы 1 нечет линия и 1 игрок выиграет. ВАЖНО! Эта четная линия, по которой мог определить клетку, в которую 1 игрок поставит единицу, должна пересекать только одну из этих двух пустых клеток) ~~т.е н-пр будет строка, един чет. стро линия в ют~~

Если же такой четной линии не найдется (которая пересекает клетку из двух и только одну пустую клетку при этом обязательно является четной) то тогда, все ~~строки~~ линии, пересекающие только одну из пустых клеток являются нечет. В этом случае, независимо от того, куда поставит единицу 1 игрок, 2 игрок сделает 1 нечет линию (т.к. чет. числа четность не меняют), а значит, по пункту 3, найдется хотя бы еще одна нечет. линия. и тогда победит 1 игрок.

Получается при правильной игре выиграет 1 игрок

Ответ: Первый.

№7 (часть 1)

1) число: $\underbrace{\boxed{}\ \ldots\ \boxed{}}$, $\boxed{a}\boxed{b}$

разряд десятков; разряд единиц

N - кол-во нечет цифр в разрядах числа, кроме разряда десятков и единиц.

N	a	b	сумма цифр числа	Само число.
четное	четное	чет	чет	чет
		нечет	нечет	нечет
	нечетное	чет	нечет	чет O
		нечет	чет	нечет *
нечетное	чет	чет	нечет	чет O
		нечет	чет	нечет *
	нечет	чет	чет	чет
		нечет	нечет	нечет

* т.к четное ⋮ нечетному => такое число не может быть харшадом

O - такое число может быть харшадом, однако число, следующее за ним - * которое харшадом быть не может, => O - может быть только в конце ряда харшадов

2) Пусть кол-во нечет цифр числа в разряде до разряда единиц нечет. если цифра в разряде единиц чет, то харшад возможен, т.к чет. число может быть кратно нечетному. Однако след. (или предыдущее) число имеет нечет кол-во нечет цифр до разряда единиц и нечет цифру в разряде единиц

№7 (часть 2)

Значит сумма цифр числа чётна, а само число нечётно, нечет / чет

Максимальная длина такого ряда хорошая (если 1ое число имеет нечет. кол-во нечет. цифр до разряда единиц.) = 1 числу.

3) Пусть начало ряда состоит из чисел, у которых кол-во нечет. цифр в разрядах до разряда единиц четно. Таких вариантов максимум 10 (от 0 до 9 в разряде единиц) и пусть при переходе через десяток в разрядах до разряда единиц кол-во нечет. цифр чётно. Тогда снова имеем 10 вариантов (от 0 до 9 на конце, т.е в разряде единиц) Перейти через десяток таким образом возможно, если в разряде десятков ~~стоит~~ станет 0 и еще в каком-то разряде четная цифра стала нечет (возможно еще в чет. кол-ве разрядов, например сотен и тысяч, будет 0, но на решение это не влияет). Двадцатым числом в этом ряду будет число у которого чет. кол-во нечет. цифр в разрядах кроме разряда единиц, а в разряде единиц 9: ....09 Теперь при переходе через десяток будет ....10 и в этом числе нечет кол-во нечет цифр. а само число чет. И это чет меняет действия на нечет. максимум 21 число в ряду

След. число будет имеет нечет. кол-во нечет. цифр. ~~10 след число будет иметь нечет кол-во~~ в разрядах до разряда единиц и 1 в разряде единиц. То есть сумма цифр четн. но число нечет, а нечет ; чет.

№ 7 (часть 3)

Если же при первом переходе через разряд у нас получится, что нечет цифр до разряда единиц стало нечет, то след. число после перехода будет уже не харшад и прервет ряд. (т.к. на конце в разряде единиц будет 1, а 1 - нечет, тогда сумма цифр числа чет, а число нечет; нечет ⁒ чет.).

Получается ряд харшад не может быть > 21

Что

(~~максимум~~ максимум 21 число получается когда мы говорим, если после перехода будет чет. кол-во нет. цифр до разряда единиц; см. 2 часть задачи, 3 пункт.)

№1 (часть 1)

a, b, c.

Пусть утв. неверно, тогда.

$a+c-4b^2>\frac{1}{4}$ ①

$a+b-4c^2>\frac{1}{4}$ ②

$b+c-4a^2>\frac{1}{4}$ ③

Не умаляя общности: $a\geq b\geq c$

① $4a+4c-16b^2>1$

② $4a+4b-16c^2>1$

③ $4b+4c-16a^2>1$.

①-②

$4a+4c-16b^2-4a-4b+16c^2>0 \quad |:4$

$(c-b)+4(c-b)(c+b)>0$

~~$(c-b)(1-4c$~~

$(c-b)(1-4(c+b))>0 \Rightarrow b\neq c$

Аналогично $a\neq b \Rightarrow a>b>c$

① - ② — $2\cdot$③

$8a-4c+4b-16b^2-16c^2-8b-8c+16a^2>0$

$8a-4b-4c-16b^2-16c^2+16a^2>0$

$2a-b-c-4b^2-4c^2+4a^2>0$

$\frac{2a-b-c}{4}>b^2+c^2-a^2$ (1)

②+③ — $2\cdot$①

$4a+8b+4c-16c^2-16a^2-8a-8c+16b^2>0$

$8b-4a-4c-16a^2-16c^2+16b^2>0$

$2b-a-c-4a^2-4c^2+4b^2>0$

~~$2a-b$~~ $\frac{2b-a-c}{4}>a^2+b^2-c^2$ (2)

№ 1 (часть 2)

(1) + (3) − 2 · (2)

$$\frac{2c-b-a}{4} > a^2+c^2-b^2 \quad (3)$$

(1) + (2) + (3)

$$\frac{2a-b-c+2b-a-c+2c-b-a}{4} > b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2$$

$$\frac{2a-2a+2b-2b+2c-2c}{4} > b^2+c^2+a^2$$

$0 > b^2+c^2+a^2$ неверно

Противоречие => изначальное утверждение верно.

Чтд.