1. Если сумма этих чисел не больше ¾, то хотя бы одно из них не больше ¼ т.к. если это не так, то сумма чисел будет больше ¾. Сумма этих чисел равна 2a-(2a)^2+2b-(2b)^2+2c+(2c)^2. Докажем, что 2a-(2a)^2, 2b-(2b)^2 и 2c-(2c)^2 не больше ¼. 2a-(2a)^2=2a(1-2a). Если 2a=0.5 то 2a-(2a)^2=1/4. Если 2a на x больше 0.5, то 2a-(2a)^2=(0.5+x)(0.5-x)=1/4-x^2, что меньше ¼. Если 2a на x меньше 0.5, то 2a-(2a)^2=(0.5+x)(0.5-x)=1/4-x^2, что меньше ¼. Значит 2a-(2a)^2 не больше ¼. Аналогично 2в-(2в)^2 и 2c-(2c)^2 не больше ¼. Значит сумма чисел не больше ¾ т.е. хотя бы одно число не больше ¼. ■

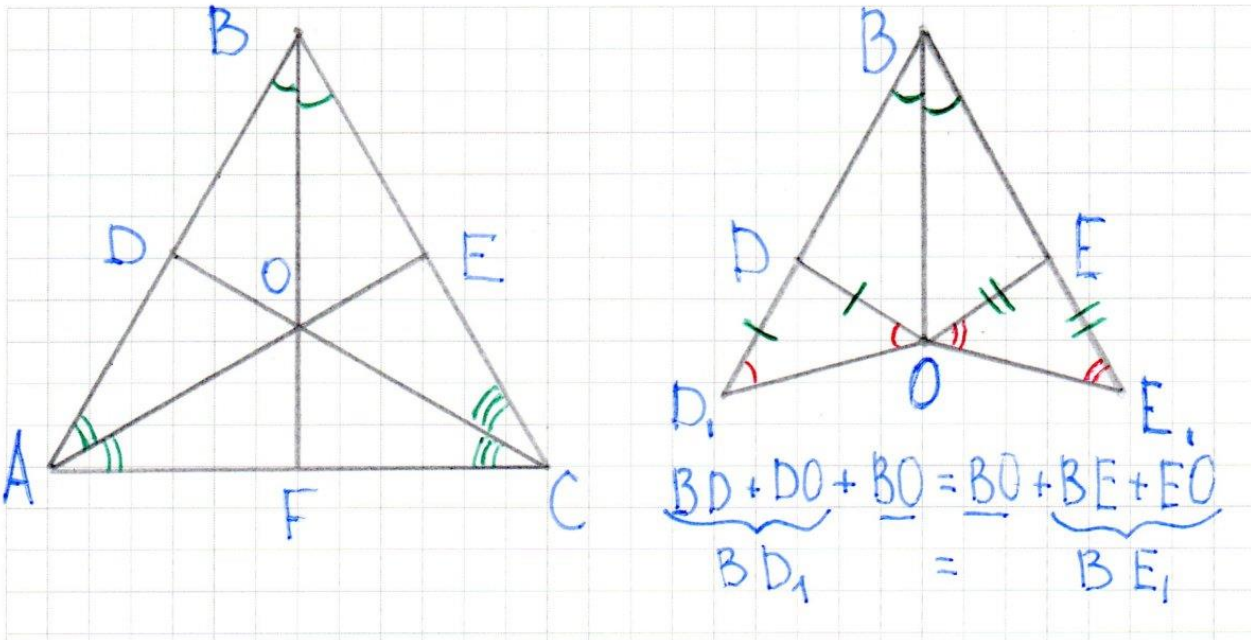
2. Подсчитаем какова вероятность того, что НОД(n, 2024)>1. n должно делиться на 2, на 11 или на 23. Таких чисел от 1 до 2024 по формуле включений-исключений для трёх множеств 1012+184+88-92-44-8+4=1144, но 2024 делится на 2, т.е. таких чисел от 1 до 2023 1144-1=1143. Тогда вероятность равна 1143/2023, т.е. вероятность того, что НОД(n, 2024)=1 равна 880/2023.
Ответ: 880/2023.

3. Квадратов с размером 1x1, 2x2,...,9x9 - 285. Квадратов с размером √2x√2, 2√2x2√2,...,4√2x4√2 - 120. Квадраты с размером √5x√5, √10x√10,..., √65x√65 могут располагаться зеркально, поэтому их 210*2=420. (см. стр.3) Итого 825.

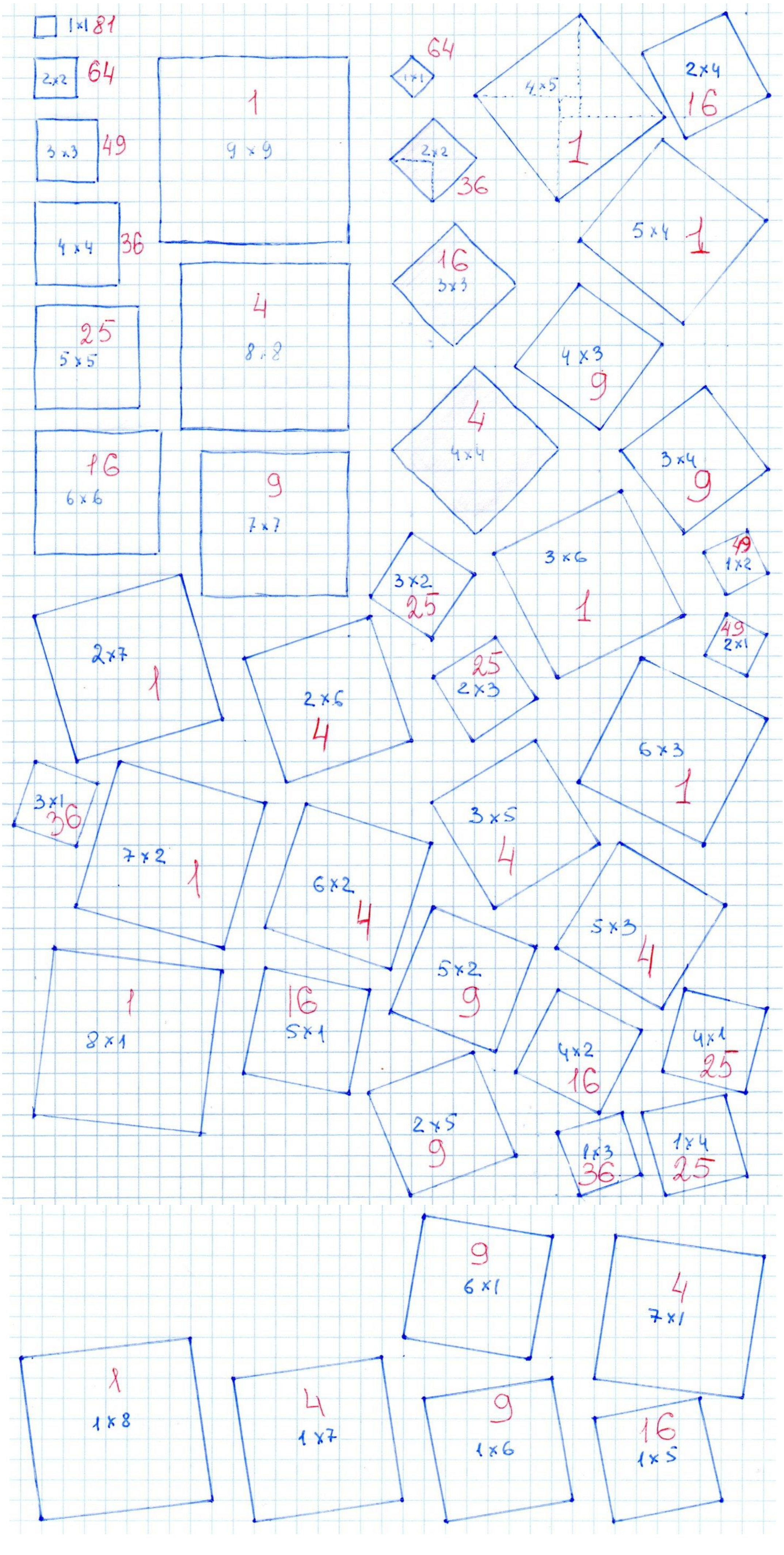
4. Какая-то четвёрка цифр встретится два раза, т.к. всего четверок цифр 10000 и среди первых 10001 найдутся две одинаковые. Пусть в последовательности цифры abcd встретятся два раза (не обязательно с самого начала последовательности). Тогда цифры перед ними (e) также должны быть одинаковыми и образовались новые одинаковые четверки цифр (eabc) и т.д. Когда-нибудь дойдём до цифр 2, 0, 2, 3 т.е. эта четвёрка встретится ещё раз. Ответ: да.

6. Рассмотрим два последних хода. У нас есть две пустые клетки. Пусть походив в какую-то из них первый проиграл. Общая сумма цифр по горизонтали равна общей сумме по вертикали, поэтому количество нечётных сумм - чётно, т.е. если оно в конце игры меньше двух, то оно равно 0. Докажем , что если бы он походил в другую клетку, то он бы выиграл. Есть два случая (клетки на одной вертикали или горизонтали или они на разных вертикалях и горизонталях): 1) клетки в одной вертикали. Тогда если бы он походил в другую клетку, то образовалось бы 2 нечет суммы (в горизонталях), т.е. он победил. 2) клетки на разных горизонталях и вертикалях. Тогда если бы он походил в другую клетку, то образовалось бы 2 нечет суммы (у обоих клеток), т.е. он победил.

5. Рассмотрим ΔODB и ΔOBF. OB-общая сторона. Значит BD+DO=BE+EO. Продлим стороны DB на длину DO, а сторону BE на длину EO. Т.к. $DO=DD_1$ и $OE+EE_1$ то $BD+DD_1=BD_1=BE_1=BE+EE_1$. Сторона BO общая $\angle D_1BO=\angle E_1BO$ (BO – биссектриса) и $BD_1=BE_1 \Rightarrow \Delta D_1OB=\Delta BOE_1$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $D_1O=OE_1$, $\angle DD_1O=\angle DOD_1=\angle E_1OE+\angle EE_1O$ (Т.к. $DO=DD_1$ и $OE+EE_1$ треугольники равнобедренные) $\Rightarrow$ $\Delta D_1DO=\Delta E_1EO$ по 2 признаку $\Rightarrow$DO=OE$\Rightarrow$DB=BE. Аналогично рассмотрим ΔECO и Δ FCO и ΔFAO и ΔDAO. Получим DO=EO=FO $\Rightarrow$ DB=BE=EC=CF=FA=AD $\Rightarrow$AB=BC=AC. ■




7. Пусть это возможно. Тогда у чисел будет переход через десяток, т.к. если первый переход был не через десяток, то второй точно через десяток. Рассмотрим этот переход. Пусть число до перехода оканчивается на x9, и оно с нечет суммой цифр. Тогда число после перехода оканчивается на (x+1)0, и оно с нечет суммой цифр. Но тогда следующее число оканчивается на (x+1)1, и оно с чет суммой цифр, но нечет число не делится на чет. Значит это невозможно.


1x1 81
2x2 64
3x3 49
4x4 36
25
5x5
16
6x6
1
9x9
4
8x8
9
7x7
64
1x1
2x2 36
16
3x3
4
4x4
4x5
1
2x4
16
5x4 1
4x3
9
3x4
9
3x6
1
49
1x2
49
2x1
3x2
25
25
2x3
6x3
1
2x7
1
2x6
4
3x5
4
3x1
36
7x2
1
6x2
4
5x3
4
5x2
9
1
8x1
16
5x1
4x2
16
4x1
25
2x5
9
1x3
36
1x4
25
9
6x1
4
7x1
1
1x8
4
1x7
9
1x6
16
1x5