Заметим что чисел из отрезка $[1; 2023]$ взаимнопростых с 2024 в точности $\varphi(2024)$ (т.е. $НОД(n, 2024) = 1$), где $\varphi(k)$ - кол-во чисел взаимнопростых с k и меньших чем k. Известный факт что $\varphi(k) = k\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$, где $k = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, но $2024 = 2^3\cdot 11\cdot 23$, т.е. $\varphi(2024) = 2024\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{23}\right) = 880$. Значит на отрезке $[1; 2023]$ 880 чисел ~~взаимно~~ таких что $НОД(n, 2024) = 1$. Значит вероятность что случайно выбранное число n будет взаимно просто с 2024 равна $\frac{880}{2023}$. Ответ: $\frac{880}{2023}$

② Будем решать задачу в общем виде. ~~Назовём хорошим кв - вписанный~~ выбранный ~~квадрат, стороны~~ Назовём вписанным квадрат, вершины которого являются отмеченные точки. Хорошим назовём вписанный квадрат стороны которого параллельны или совпадают со сторонами исходного. Аналогично определим плохой квадрат (пример хорошего и плохого приведён на рис 1).

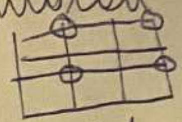
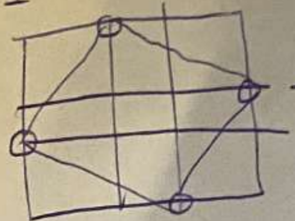
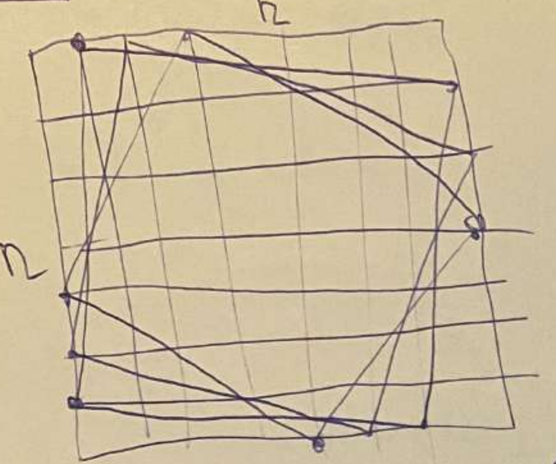

- хороший квадрат

рис 1


- плохой квадрат.

Лемма. Из хорошего квадрата $n \times n$ $(n>1)$ можно вырезать $n-1$ плохих квадратов, вершины которых лежат на сторонах. Это так, потому что выбрав на стороне одну из вершин плохого квадрата, остальные три восстанавливаются однозначно из симметрии. (Вершину можно выбрать $n-1$ способами)



Заметим что из квадрата $n \times n$ можно вырезать n^2 квадратов 1×1, $(n-1)^2$ квадратов 2×2 .... $(n-k+1)^2$ квадратов $k \times k$, ... 1 квадрат $n \times n$ (хороших квадратов). ~~Из каждого из этих квадратов можно вырезать~~ Согласно лемме из квадрата 2×2 можно вырезать 1 плохой квадрат, из $3 \times 3 \to 2$ ... из $k \times k \to k-1$ ... из $n \times n \to n-1$. Причём и хорошие и плохие квадраты мы посчитали по одному разу (т.к. по плохой квадрат однозначно задаёт хороший и наоборот). Но тогда искомое кол-во квадратов равно $n^2 \cdot 1 + (n-1)^2 \cdot 2 + \ldots + 1^2 \cdot n = \sum_{k=1}^{n} k(n-k)^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n} k - 2n \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^3 =$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Посчитаем сумму $n^2 \cdot 1 + (n-1)^2 \cdot 2 \ldots + 1^2 \cdot n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 (k+1)$

$$= n^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) - 2n \sum_{k=0}^{n-1} k^2 - 2n \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} k^3 + \sum_{k=0}^{n-1} k =$$

$$= n^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\cancel{2}n^2(n-1)(2n-1)}{\cancel{6}\,3} - \frac{\cancel{2}n^2(n-1)}{\cancel{2}} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} + \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^3(n+1)}{2}^{\backslash 6} - \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{3}^{\backslash 4} - n^2(n-1)^{\backslash 2} + \frac{n^2(n-1)^2}{4}^{\backslash 3} + \frac{n(n-1)}{2}^{\backslash 6} = \frac{(n+1)^2(n^2+2n)}{12} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12},$$ что при $n=9$

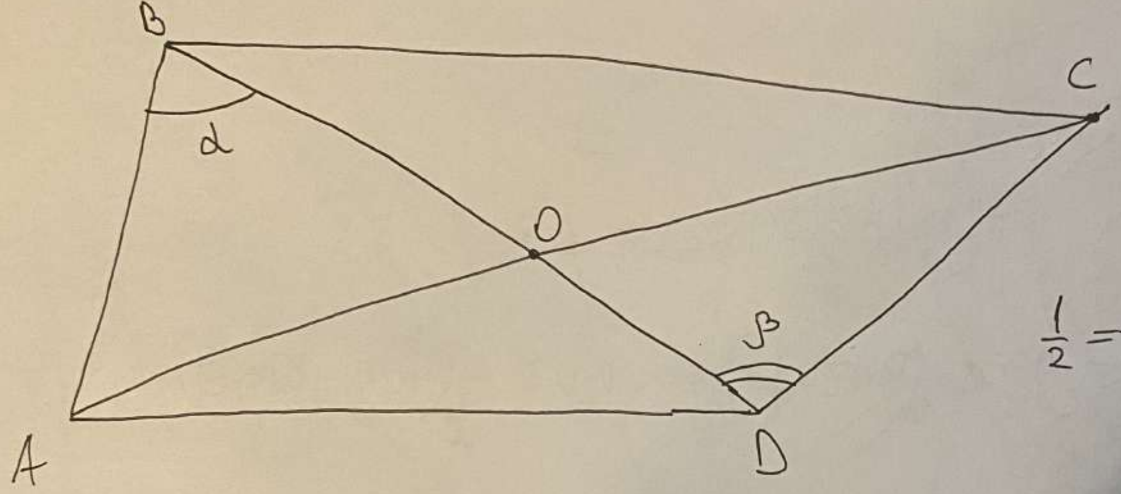
равно $\frac{9 \cdot 10^2 \cdot 11}{12} = 825.$

Ответ: 825

③. Ответ: Да, встретится. Как видно из условия задачи четверка чисел a, b, c, d в этой последовательности однозначно восстанавливается следующее число. Пускай x написано перед четверкой чисел a, b, c, d, тогда $x+a+b+c \underset{10}{\equiv} d$, откуда $x \underset{10}{\equiv} d-a-b-c$, очевидно что x тоже однозначно восстанавливается. Но тогда двум одинаковым четверкам цифр соответствует одно и тоже предшествующее число. Но четвёрок цифр конечное число (10^4), поэтому рано или поздно в этой бесконечной последовательности найдётся две одинаковых четвёрки чисел, т.е. последовательность для некоторых a, b, c, d имеет вид: $(\overset{\mathrm{I}}{2,0,2,3,\dots y,x,a,b,c,d})(\overset{\mathrm{II}}{\dots y,x,a,b,c,d})$. Рассматривая четвёрки чисел x, a, b, c получим что перед x написано одно и тоже число в I и II части, продолжая этот процесс получим что части I и II совпадают, т.е. во второй части встретится ~~числа~~ последовательность цифр 2,0,2,3.

□

(4)



Пусть $\angle ABD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$.

Тогда $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} =$
$= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AB \cdot BD + \frac{1}{2}\sin\beta \cdot BD \cdot CD$
$\leq \frac{BD}{2}(AB + CD) \leq \frac{1}{2} BD(2 - BD) =$
$= BD - \frac{1}{2}BD^2$, т.е.

$\frac{1}{2} = S_{ABCD} \leq BD - \frac{1}{2}BD^2 \quad |\cdot 2$

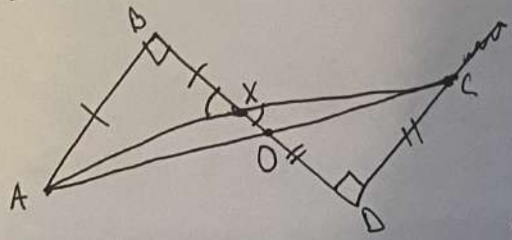
$1 \leq 2BD - BD^2$

$BD^2 - 2BD + 1 \leq 0$

$(BD - 1)^2 \leq 0 \iff BD - 1 = 0$

$BD = 1$.

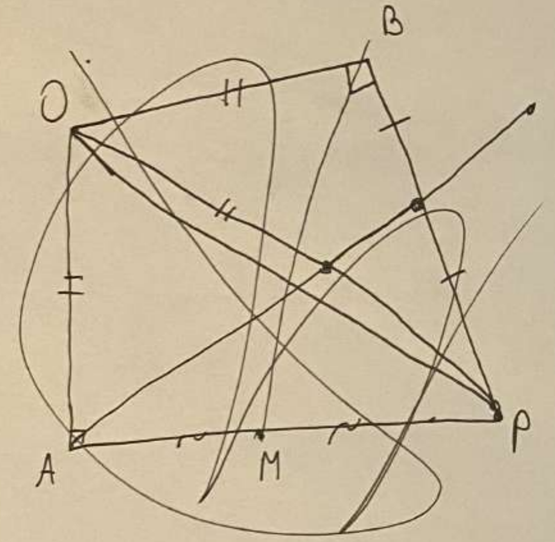
Тогда $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AB + \frac{1}{2}\sin\beta \cdot CD \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$, т.е. $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(AB + CD) \iff AB + CD \geq 1$, но $AB + CD \leq 2 - CD = 1$, то есть $AB + CD = 1$, и в ~~условие~~ ~~неравенств~~ неравенстве $\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AB + \frac{1}{2}\sin\beta \cdot CD \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$ равенство, ~~откуда~~ но равенство в нём возможно только если $\sin\alpha = \sin\beta = 1$, откуда $\alpha = \beta = 90°$. Итого $BD = AB + CD = 1$ и $\angle ABD = \angle BDC = 90°$ (см. рис.)

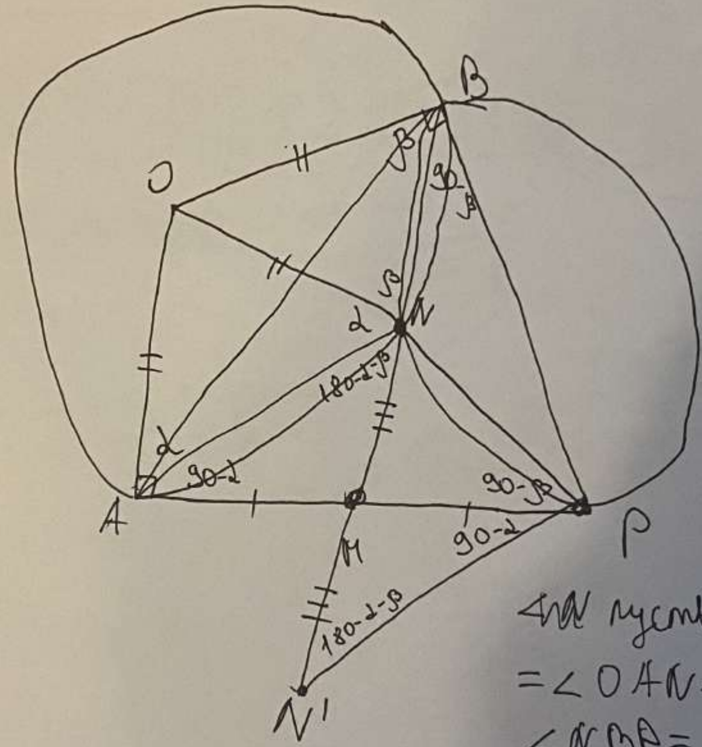


Отметим на BD такую точку X, что $AB = BX$, тогда $XD = BD - BX = BD - AB = CD$, значит $\angle BXA = \angle DXC = 45°$, но тогда ~~Ха~~ точки X, A, C лежат на одной прямой но ~~лежит~~ B, D, X тоже лежат на одной прямой, значит X – точка пересечения диагоналей. Но тогда угол между диагоналями равен 45°.

Ответ: 45°.

5





Заметим что $OA = OB$, т.к. A сим. B отн OP, но тогда $ON = OB = OA$, тогда O – центр описанной окружности $\triangle ANB$, причем OB, OA – радиус, а также $OB \perp BP$ и $OA \perp AP \Rightarrow AP$, PB – кас к окр. ANB. Тогда $AM^2 = MN \cdot MB$, но $AM = MP \Rightarrow MP^2 = MN \cdot MB$, тогда MP – кас. к окр. NBP, тогда пусть $\angle OBN = \angle ONB = \beta$, а $\angle ONA = \angle OAN = \alpha$, тогда $\angle ANM = 180 - \alpha - \beta$, а $\angle NBP = 90 - \beta$, $\angle NPM = \angle NBP = 90 - \beta$ (по теореме о угле между хордой и касательной). Пусть N' симметрична N отн. точки M, тогда $ANPN'$ – параллелограмм (т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам), тогда $AN \parallel N'P \Leftrightarrow \angle ANN' = \angle NN'P = 180 - \alpha - \beta$, а $\angle NAP = 90 - \alpha = \angle APN'$ откуда $\angle NN'P = (90 - \alpha) + (90 - \beta) = \angle MPN' + \angle APN = \angle N'PN \Rightarrow N'N = NP$, т.е. $NP = 2MN$.

⑥ Предположим противное. Пусть существуют 22 посл. ~~хх~~ интересных числа, пусть это числа $n, n+1 \ldots n+21$. Обозначим $A = \{n, n+1 \ldots n+21\}$. Лемма. В множестве A существует такое k, что $k, k+1, k+2 \in A$ и $k = \overline{a_1a_2\ldots a_k9}$, причем $a_k \neq 9$.

Доказательство. Если $n = \overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}$, при том $a_k \neq 9$, то найдется m, такое что $m = \overline{a_1a_2\ldots a_k9}$ (т.к. $m-n = 9-a_{k+1} \leq 9$, т.е. $m \in A$), при том $m+1, m+2 \in A$, тогда в этом случае лемма доказана. Тогда можно считать что $n = \overline{a_1a_2\ldots 9a_{k+1}}$, но тогда существует $m = \overline{a_1a_2\ldots 09} \in A$ (т.к. $m-n \leq 19$), причем $m+1, m+2$ также $\in A$, при том у m предпоследняя цифра не равна 9. Лемма доказана. Согласно этой лемме существует такое число k среди этих 22 интересных чисел, что $k, k+1, k+2 \in A$ и $k = \overline{a_1a_2\ldots a_k9}$, где $a_k \neq 9$, тогда $k+1 = \overline{a_1a_2\ldots(a_k+1)0}$, $k+2 = \overline{a_1a_2\ldots(a_k+1)1}$. Обозначим $a_1+a_2\ldots+a_k = S$, тогда сумма цифр числа k равна $S+9$, $k+1 \to S+1$, $k+2 \to S+2$. Значит $k \vdots S+9$ и $k+2 \vdots S+2$, заметим что числа $S+2$ и $S+9$ разной четности, поэтому хоть одно из чисел $k, k+2 \vdots 2$, т.е. четное, но ~~о~~ они одной четности. Противоречие.

(7) Заметим что $z = -x - y$, откуда $k(x^3+y^3+z^3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k(x^3+y^3+(-x-y)^3)^2 \le (x^2+y^2+(-x-y)^2)^3 \Leftrightarrow k(3xy(x+y))^2 \le (2x^2+2y^2+2xy)^3 =$

$= 8(x^2+y^2+xy)^3$. Итого исходное неравенство равносильно неравенству

$k(3xy(x+y))^2 \le 8(x^2+y^2+xy)^3$, докажем это неравенство с помощью ~~(тогда при этом z ...)~~ метода Штурма. Заметим что при сближении чисел x и y с сохранением (причем при этом z не меняется) суммы произведение xy возрастает, а сумма квадратов x^2+y^2 убывает, поэтому достаточно рассмотреть случай когда $x=y$, т.е.

$k(3x^2\cdot 2x)^2 \le 8(3x^2)^3$

$36k\cancel{x^6} \le 8\cdot 27\cancel{x^6}$

$k \le \frac{8\cdot 27}{36} = 6$, т.е. $k \le 6$, ~~значение~~ при $k=6$ это неравенство аналогичными преобразованиями и методом Штурма получим верное неравенство

$36\cdot 6 \le 8\cdot 27 \Leftrightarrow 216 \le 216$ ~~верно~~.

□