№1

Докажем, что для $x\in(0;\frac{\pi}{10}]$

$\cancel{\sin x > \frac{\sin 5x}{5}}$ $5\sin x > \sin 5x$

$5\sin 0 = \sin 5\cdot 0 = 0.$

$(5\sin x)' = 5\cos x$

$(\sin 5x)' = 5\cos 5x$

Т.к. $\cos x$ убывает на $[0;\frac{\pi}{2}]$. и $5x > x$,
то $\cos 5x < \cos x$, т.к. $5x, x \in (0;\frac{\pi}{2}]$, т.к.
$x\in(0;\frac{\pi}{10}] \Rightarrow (5\sin x)' > (\sin 5x)'$ при $x\in(0;\frac{\pi}{10}]$
$\Rightarrow 5\sin x$ растет на этом промежутке быстрее, чем $\sin 5x \Rightarrow 5\sin x > \sin 5x$ для
$x\in(0;\frac{\pi}{10})$, т.к. $5\sin 0 = \sin(5\cdot 0) = 0$

Рассмотрим теперь $x=\frac{\pi}{30}$:

$5\sin\frac{\pi}{30} > \sin\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{30} > \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{5} = 0,1.$

■

№2

] $S(n)$ - сумма цифр числа n.

Если нечётное n является числом

хорошо, то $S(n)$ точно не может быть чётным, т.к. нечётные числа не могут делиться на чётные.

Докажем, что среди 22 последовательных чисел найдётся $n \vdots 2 \mid S(n) \vdots 2$.

Докажем сначала, что среди 22 посл. чисел найдутся нечётные числа хотя бы из трёх различных десятков. Предположим противное, тогда ~~нег. числа есть не более~~ среди этих 22 чисел есть нег. числа не более, чем из двух десятков, тогда нег. чисел не более 10, но среди 22 посл. чисел всегда есть 11 чётных и 11 нечётных, $11 > 10$ — ⨯ $\Rightarrow$ найдутся неч. числа из 3-х десятков.

Рассмотрим числа вида $\overline{a9}$, $\overline{(a+1)1}$, $\overline{(a+2)1}$ (исходя из выше доказанного утверждения такие числа точно есть среди 22-х посл. чисел), где $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Допустим, $S(\overline{a9}), S(\overline{(a+1)1}), S(\overline{(a+2)1}) \vdots 2$

Тогда, т.к. $S(m+n) = S(m) + S(n) - 9p$, где p — число переходов через разряд при сложении m и n, $S(\overline{(a+1)0}) = S(\overline{a9}) + 1 - 9p$.

Т.к. $S(\overline{(a+1)1}) \not\vdots 2$, то $S(\overline{(a+1)0}) \vdots 2 \Rightarrow p \vdots 2$, т.к. $S(\overline{a9}) \not\vdots 2$.

$p \vdots 2$, $p > 0$ (т.к. был переход в разряде единиц) $\Rightarrow p \geq 2 \Rightarrow$ точно был переход и в разряде десятков $\Rightarrow$ в числе $\overline{(a+1)1}$ в разряде десятков стоит 0, а в числе $\overline{(a+2)1}$ стоит 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при сложении $\overline{(a+1)9}$ и 1 был лишь 1 переход через разряд $\Rightarrow$

$\Rightarrow S(\overline{(a+2)0}) = S(\overline{(a+1)9}) + 1 - 9 = S(\overline{(a+1)9}) - 8 \not\vdots 2$, т.к. $S(\overline{(a+1)9}) \not\vdots 2$, т.к. $S(\overline{(a+1)9}) = S(\overline{(a+1)1}) + 8 - 9 \cdot 0 = S(\overline{(a+1)1}) + 8$.

Т.к. $S(\overline{(a+2)0}) \not\vdots 2$, то $S(\overline{(a+2)1}) \vdots 2$ — W с предположением $\Rightarrow$ предположение неверно $\Rightarrow$ одно из чисел $S(\overline{a9})$, $S(\overline{(a+1)1})$, $S(\overline{(a+2)1})$ чётно $\Rightarrow$ одно из чисел $\overline{a9}$, $\overline{(a+1)1}$, $\overline{(a+2)1}$ не может быть числом харииад ⇒ не может быть др.-х пол. числ харииад.

№3

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2} = \frac{(x^2+y^2+(x+y)^2)^3}{(x^3+y^3-(x+y)^3)^2}, \text{ т.к. } z = -x-y$$

$$\frac{(x^2+y^2+(x+y)^2)^3}{(x^3+y^3-(x+y)^3)^2} = \frac{8(x^2+y^2+xy)^3}{(-3x^2y-3y^2x)^2} =$$

$$= \frac{8(x^2+y^2+xy)^3}{9x^2y^2(x+y)^2} = \frac{8(x^2+y^2+xy)(x^4+y^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+2x^2y^2)}{9x^2y^2(x+y)^2} =$$

$$= 8(x^6+x^2y^4+3x^4y^2+2x^5y+2x^3y^3+x^4y^2+y^6+3x^2y^4+2x^3y^3+2xy^5+x^5y+xy^5+3x^3y^3+2x^4y^2+2x^2y^4)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{9x^2y^2(x+y)^2} = 8(x^6+y^6+3x^5y+3xy^5+6x^4y^2+6x^2y^4+7x^3y^3)\cdot\frac{1}{9x^2y^2(x+y)^2} \geq$$

$$\geq \frac{8(2x^3y^3+3x^5y+3xy^5+6x^4y^2+6x^2y^4+7x^3y^3)}{9x^2y^2(x+y)^2},$$

Т.к. $a^2+b^2 \geq 2ab,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{8(2x^3y^3+3x^5y+3xy^5+6x^4y^2+6x^2y^4+7x^3y^3)}{9x^2y^2(x+y)^2} =$$

$$= \frac{8xy(3x^4+3y^4+6x^3y+6xy^3+9x^2y^2)}{9x^2y^2(x+y)^2} =$$

$$= \frac{24(x^4+y^4+2x^3y+2xy^3+3x^2y^2)}{9xy(x+y)^2} =$$

$$= \frac{8x^4+8y^4+16x^3y+16xy^3+24x^2y^2}{3x^3y+6x^2y^2+3xy^3} =$$

$$= \frac{16(xy^3+x^3y+2x^2y^2)+8(x^4+y^4-x^2y^2)}{3(xy^3+x^3y+2x^2y^2)} =$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{8(x^4+y^4-x^2y^2)}{3(xy^3+x^3y+2x^2y^2)} \geq \frac{8\left(x^4+y^4-\frac{x^4+y^4}{2}\right)}{3xy(x+y)^2}$$

т.к. $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{16}{3} + \frac{8\left(x^4+y^4-\frac{x^4+y^4}{2}\right)}{3xy(x+y)^2} = \frac{4(x^4+y^4)}{3xy(x+y)^2} + \frac{16}{3}$$

Докажем, что $2(x^4+y^4) \geq xy(x+y)^2$.

$2(x^4+y^4) - xy(x+y)^2 = x^4+y^4-2x^2y^2+x^4+y^4-x^3y-xy^3 = (x^2-y^2)^2+(x-y)(x^3-y^3) \geq 0$,

т.к. $(x-y)$ и (x^3-y^3) всегда либо одного знака, либо равны $0 \Rightarrow 2(x^4+y^4) \geq xy(x+y)^2 \Rightarrow \frac{4(x^4+y^4)}{3xy(x+y)^2} \geq 2 + \frac{16}{3} \geq$

$$\geq \frac{2xy(x+y)^2}{3xy(x+y)^2} + \frac{16}{3} = 6.$$

Таким образом, $\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2} \geq 6.$

~~Равенство достигается при $x=y$, тогда $z=-2x$,~~

~~$(x^2+y^2$~~

$$6(x^3+y^3+z^3)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)^3$$

Равенство достигается при $x=y$, тогда $z=-2x$,

$$6(x^3+y^3+z^3)^2 = 6(2x^3-8x^3)^2 = 216x^6$$

$$(x^2+y^2+z^2) = (2x^2+4x^2)^3 = 216x^6 =$$

$$= 6(x^3+y^3+z^3)^2.$$

Также следует отдельно рассмотреть случай, когда одно из чисел x, y равно нулю, т.к. при док-ве мы сокращали на xy.

~~без огр. общности рассмотрим случа~~

Рассмотрим $x=0$ ($y=0$ - аналогично), тогда $y=-z$.

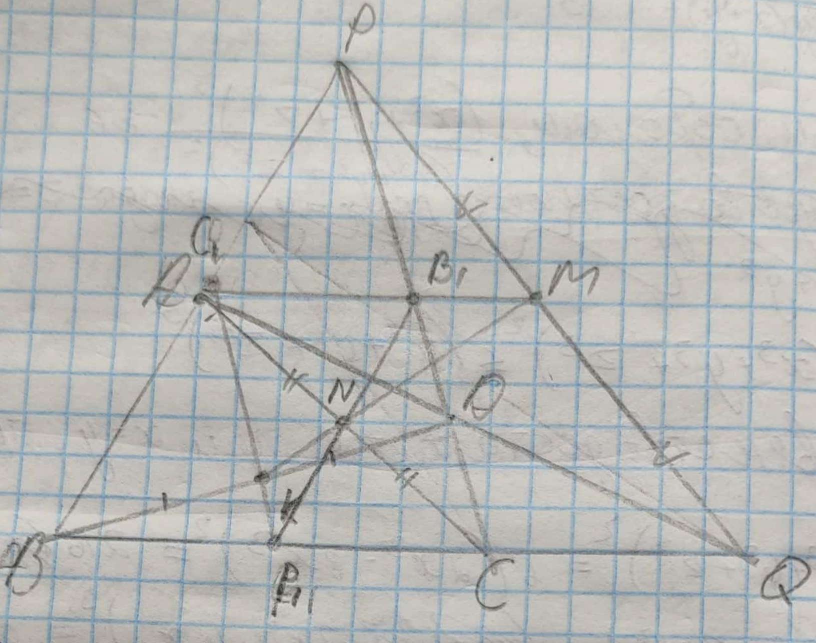
$$6(x^3+y^3+z^3)^2 = 6(y^3-y^3)^2 = 0 \leq$$

$$\leq (x^2+y^2+z^2)^3$$

Таким образом, $k=6$

Ответ: 6.

№4



M, N, K – середины PQ, ~~BD~~ AC, BP соответственно.

B_1, C_1, P_1 – середины PC, PB, BC соответственно.

M лежит на ~~средней линии~~ (B_1C_1), т.к. M делит чевиану PQ ΔBPC пополам, а $[B_1C_1]$ – средняя линия. Аналогично $N \in B_1P_1$, $K \in P_1C_1$.

По св-ву ср. линии ~~ΔBPC~~, $C_1B_1 \parallel BC$, $B_1P_1 \parallel BP$, $P_1C_1 \parallel PC \Rightarrow \Delta B_1PM \sim \Delta CPM$, $\Delta C_1PM \sim \Delta BPQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{C_1M}{BQ} = \frac{PM}{PQ} = \frac{B_1M}{CQ} \Rightarrow \cancel{\frac{B_1M}{C_1M}} = \frac{CQ}{BQ}$

$\Rightarrow \frac{C_1M}{MB_1} = \frac{BQ}{CQ}$

Аналогично:

$\frac{P_1K}{KC_1} = \frac{CD}{DP}$

$\cancel{\frac{B_1N}{BB}} = \cancel{\frac{NB_1}{AP}}$ $\frac{AN}{NB_1} = \frac{AB}{AP}$

Получаем:

$\frac{P_1K}{KC_1} \cdot \frac{C_1M}{MB_1} \cdot \frac{B_1N}{NP_1} = \frac{CD}{DP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{AP}{AB}$

По т. Менелая для $\triangle BPC$ и прямой (AD):

$\frac{CD}{DP} \cdot \cancel{\frac{DB}{AB}} \frac{PA}{AB} \cdot \frac{BQ}{CQ} = 1 \Rightarrow \frac{P_1K}{KC_1} \cdot \frac{C_1M}{MB_1} \cdot \frac{B_1N}{NP_1} = 1 \Rightarrow$ По обратной теореме Менелая для $\triangle B_1P_1C_1$ точки K, N, M лежат на 1 прямой.

№5

$\rceil\ (1+\sqrt{3})^{2n+1} = A + B\sqrt{3}$, где A и $B \in \mathbb{N}$,

тогда $(1-\sqrt{3})^{2n+1} = A - B\sqrt{3}$.

$1-\sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = \frac{-2}{1+\sqrt{3}}$

$(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} = (1+\sqrt{3})^{2n+1} - \frac{2^{2n+1}}{(1+\sqrt{3})^{2n+1}}$

$= 2A$

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} = 2A + \frac{2^{2n+1}}{(1+\sqrt{3})^{2n+1}}$$

$$2 < 1+\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2^{2n+1}}{(1+\sqrt{3})^{2n+1}} < 1 \Rightarrow \left[(1+\sqrt{3})^{2n+1}\right] = 2A.$$

$$2A = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}.$$

~~По индукции докажем, что $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ максимальная степень вхо~~

По индукции докажем, что степень вхождения 2 в число $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}$ равна $n+1$.

База: $n=0$, $n=1$

$n=0$: $(1+\sqrt{3})^1+(1-\sqrt{3})^1 = 2$ – верно

$n=1$: $(1+\sqrt{3})^3+(1-\sqrt{3})^3 = 1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3} = 20 = 4\cdot 5$ – верно.

Переход:

Пусть утверждение верно для n ~~и всех натуральных чисел, меньших n~~, и $(n-1)$, докажем для $(n+1)$

$$(1+\sqrt{3})^{2n+3}+(1-\sqrt{3})^{2n+3} = \left((1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2\right)\cdot\left((1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}\right) - (1+\sqrt{3})^2\cdot$$

$\cdot(1-\sqrt{3})^2$

$= (1+2\sqrt{}$

$-((1+\sqrt{3}$

$\cdot(1+\sqrt{3})$

$-(-2)$

$= 8((1+$

$+(1+\sqrt{3}$

По пред

сказать,

$(1+\sqrt{3})$

ные.

Таким о

$(1+\sqrt{3})$

$= 2^{n+4}\cdot$

вхожд

$\Rightarrow$ ут

$\forall n\in\mathbb{N}$

Возьм

$[(1+\sqrt{}$

2^{10n}

ками

$$\cdot (1-\sqrt{3})^{2n+1} - (1-\sqrt{3})^2 (1+\sqrt{3})^{2n+1} =$$

$$= (1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3)\left((1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}\right) -$$

$$-\left((1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\right)^2 \cdot (1-\sqrt{3})^{2n-1} - \left((1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\right)^2 \cdot$$

$$\cdot (1+\sqrt{3})^{2n-1} = 8\left((1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}\right) -$$

$$-(-2)^2 \cdot (1-\sqrt{3})^{2n-1} - (-2)^2 \cdot (1+\sqrt{3})^{2n-1} =$$

$$= 8\left((1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}\right) - 4\left((1-\sqrt{3})^{2n-1} +\right.$$

$$\left. + (1+\sqrt{3})^{2n-1}\right).$$

По предположению индукции можем сказать, что $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1} = 2^{n+1}\cdot k$; $(1+\sqrt{3})^{2n-1}+(1-\sqrt{3})^{2n-1} = 2^{n}\cdot m$, где m и k — нечётные.

Таким образом, получаем:

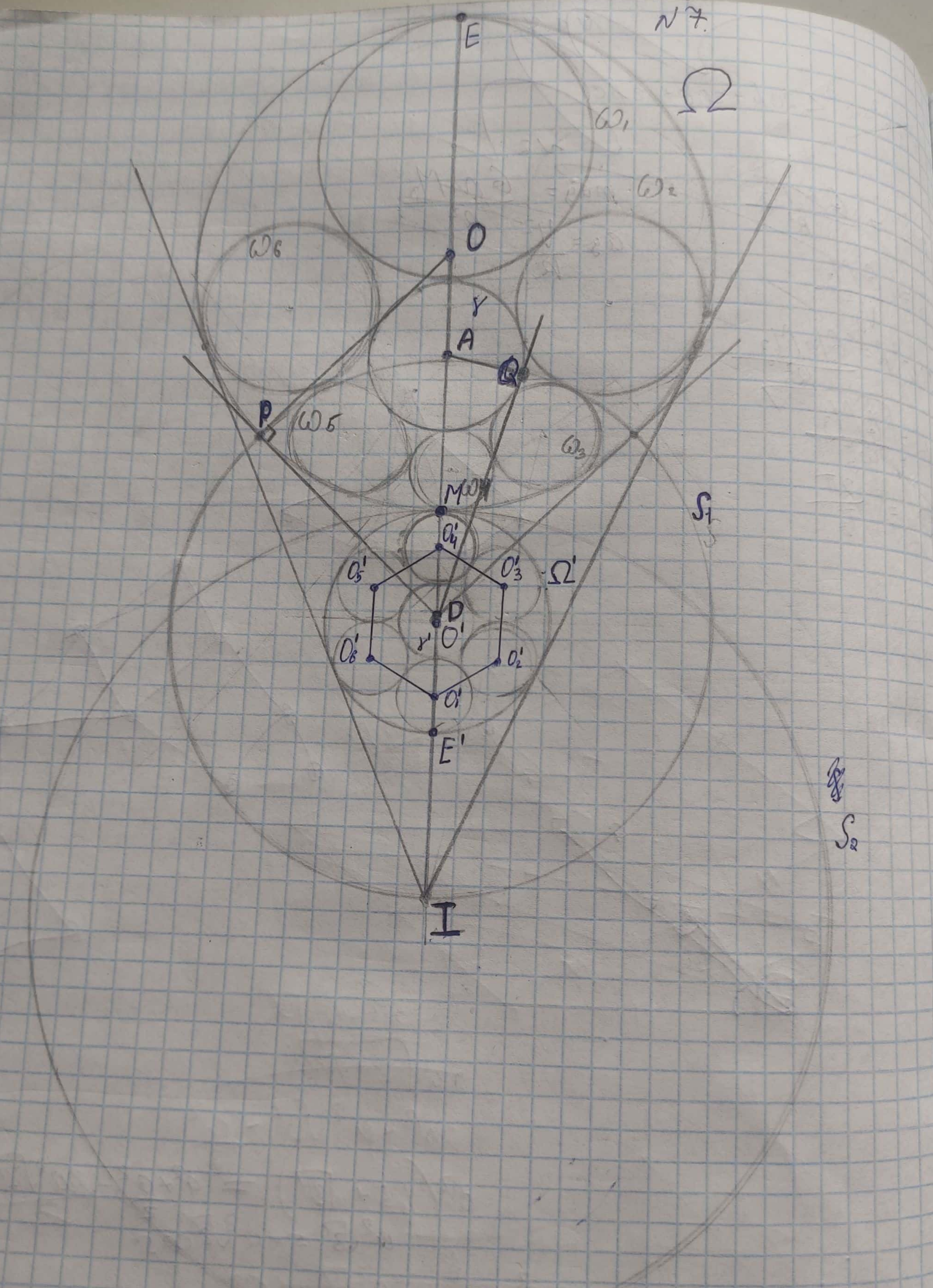
$$(1+\sqrt{3})^{2n+3}+(1-\sqrt{3})^{2n+3} = 8\cdot 2^{n+1}\cdot k - 4\cdot 2^{n}\cdot m =$$

$$= 2^{n+4}\cdot k - 2^{n+2}\cdot m = 2^{n+2}(4k-m)$$ — ~~макс.~~ степень вхождения 2 равна $n+2=(n+1)+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ утв. верно для $n+1 \Rightarrow$ утв. верно для $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Возьмём теперь $n=1011$.

$\left[(1+\sqrt{3})^{2023}\right] = (1+\sqrt{3})^{2023} + (1-\sqrt{3})^{2023}$ — кратно 2^{1012} и не кратно 2^{1013} по выше доказанному утверждению ∎



Пусть
окруж
DP–
D и р
Пусть I
ности Ω
оси, ко
Выр
IO
deg
DO

Пусть D – точка пересечения радикальной оси окружностей Ω и γ и прямой (OA).
~~A~~ DP – касательная к Ω. Построим окр. S_1 с центром D и радиусом DP.

Пусть I – точка пересечения S_1 и (OA), лежащая вне окружности Ω. Такая точка найдется, т.к. D лежит на радикальной оси, которая лежит вне Ω.

Выразим длину IO.

$$IO = OD + \cancel{DI}\, DI = OD + DP$$

$$\deg_{\Omega} D = \deg_{\gamma} D.$$

$$DO^2 - 10^2 = DA^2 - r^2$$

$$\cancel{DO}\; DA = DO - 1$$

$$\cancel{DO^2} - 100 = \cancel{DO^2} - 2DO + 1 - r^2$$

$$2DO = 101 - r^2$$

$$DO = \frac{101 - r^2}{2}$$

$$DP = \sqrt{DO^2 - 10^2},$$ т.к. $\angle OPD = 90^\circ$, т.к. DP – касательная

$$DP = \cancel{\sqrt{\frac{r^4 - 206r^2 + 101^2}{4}}}\quad \sqrt{\frac{r^4 - 202r^2 + 101^2 - 4\cdot 100}{4}}$$

$$IO = \frac{101 - r^2}{2} + \sqrt{\frac{r^4 - 202r^2 + 101^2 - 4\cdot 100}{4}} = \frac{101 - r^2 + \sqrt{r^4 - 202r^2 + 9801}}{2} \quad (*)$$

Построим окружность S_2 с центром I, касающуюся Ω.
Сделаем инверсию относительно окружности S_2.
Докажем, что образы окружностей Ω и γ – концентрические окружности. Пусть Ω' и γ' – ~~данные~~ эти образы.
~~Окружность~~ $S_1 \perp \Omega$, т.к. DP – касательная к Ω, $\Rightarrow OP \perp DP \Rightarrow$
$\Rightarrow OP$ кас. к $S_1 \Rightarrow S_1 \perp \Omega$.

$\exists\, DQ$ – кас. к γ. $DQ = DP$, т.к. D на рад. оси Ω и $\gamma \Rightarrow Q \in S_1 \Rightarrow AQ$ – кас. к S_1, т.к. $AQ \perp DQ \Rightarrow$
$\Rightarrow S_1 \perp \gamma$.

$I \in S_1 \Rightarrow S_1$ при этой инверсии ~~попадё~~ перейдут в прямую, перпендикулярную ~~окружность~~ ~~S_1~~ Ω' и γ' (т.е. перпендикулярную ~~точкам~~ касательным к этим окружностям, проведённым в точках пересечения с ними) $\Rightarrow$ т.к. инверсия сохраняет угол между окружностями S_1' проходит через центры Ω' и γ', где S_1' - прямая, являющаяся образом S_1. Помимо этого центры Ω' и γ' лежат на (OA), т.к. при инверсии (OA) перешла в себя, т.к. $I \in (OA) \Rightarrow$ либо прямые S_1' и (OA) совпадают, либо совпадают центры Ω' и γ'. Первый случай невозможен, т.к. $I \notin S_1'$, но $I \in (OA) \Rightarrow \Omega'$ и γ' концентрические $\Rightarrow$ при этой инверсии цепочка $\omega_1, \dots, \omega_6$ перешла в цепочку $\omega_1', \dots, \omega_6'$, заключённую между Ω' и γ', причём радиусы $\omega_1', \dots, \omega_6'$ равны, всё это выполняется, потому что при инверсии сохраняется касание окружностей. Пусть $O_1', O_2', \dots, O_6'$ - центры $\omega_1', \dots, \omega_6'$, r_1' - радиус $\omega_1', \dots, \omega_6'$, r' - радиус γ'. Тогда $O_1'O_2' = 2r_1' = O_2'O_3' = \dots = O_6'O_1'$.
Пусть O' - центр γ' и Ω'. Тогда $O'O_1' = O'O_2' = \dots = O'O_6' = r' + r_1' \Rightarrow$
$\Rightarrow O_1'O_2'O_3'O_4'O_5'O_6'$ - шестиугольник, вписанный в окружность с равными сторонами $\Rightarrow O_1'O_2'O_3'O_4'O_5'O_6'$ правильный $\Rightarrow$
$\Rightarrow r' + r_1' = 2r_1'$, т.к. радиус описанной окружности ~~шестиугольника~~ правильного шестиугольника равен его стороне $\Rightarrow r_1' = r' \Rightarrow$ радиус Ω' равен $3r'$

] Ω касается S_2 в точке $M \Rightarrow \Omega'$ касается S_2 в точке M, т.к. при инверсии сохраняется касание, и M переходит в себя, т.к. $M \in S_2$, кроме того Ω' касается Ω в точке M, т.к. $M \in (O'O)$ и $M \in \Omega'$, $M \in \Omega$.

] $(OI) \cap \Omega' = E'$, $(OI) \cap \Omega = E \Rightarrow E'$ - образ $E \Rightarrow$
$\Rightarrow IE' \cdot IE = IM^2$

$\cancel{IE\cdot(IM \ldots)}$ $\cancel{IE \cdot IE' =}$

$IE(IM - 6r') = IM^2$

$(IO + 10)(IO - 10 - 6r') = (IO - 10)^2$

$\cancel{IO^2} + \cancel{10IO} - \cancel{10IO} - 100 - 6r'IO - 60r' = \cancel{IO^2} - 20IO + 100$

$6r'(IO + 10) = 20IO - 200$

$r' = \dfrac{10IO - 100}{3(IO + 10)}$

~~Ц. Центр инверсии, переводящей одну окружность в~~

Центр инверсии, переводящей одну окружность в другую, является и центром гомотетии, совмещающей эти окружности. (свойство инверсии) $\Rightarrow \frac{IO'}{I\cancel{O}A} = \frac{r'}{r}$

$$\frac{IO'}{IO-1} = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{IO-10-3r'}{IO-1} = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{IO-10-\frac{10IO-100}{IO+10}}{IO-1} = \frac{10IO-100}{3r(IO+10)}$$

$$\frac{IO^2-10^2-10IO+100}{(IO-1)\cancel{(IO+10)}} = \cancel{\frac{10(IO-10)}{3r(IO+10)}} \quad \frac{10(IO-10)}{\cancel{(IO+10)}\cdot 3r}$$

$$\frac{IO^2-10IO}{IO-1} = \frac{10(IO-10)}{3r}$$

$$3r\cdot IO = 10\cancel{(IO-10)}(IO-1)$$

Исходя из (*): $IO = \underline{101-r^2+\sqrt{r^4-202r^2+9801}}$

$$\cancel{3r\cdot I}\ \frac{3}{2}r\left(101-r^2+\sqrt{r^4-202r^2+9801}\right)/2 = 5\left(101-r^2+\sqrt{r^4-202r^2+9801}\right)-10$$

$$303r-\frac{3}{\cancel{4}}r^3+3r\sqrt{r^4-202r^2+9801} = 1010-10r^2+10\sqrt{r^4-202r^2+9801}-20$$

$$(3r-10)\sqrt{r^4-202r^2+9801} = 3r^3-10r^2-303r+990$$

$$(3r-10)^2\left(r^4-202r^2+9801\right) = \left(3r^3-10r^2-303r+990\right)^2$$

$$(9r^2-60r+100)(r^4-202r^2+9801) = 9r^6+100r^4+91809r^2+980100-$$

$$-60r^5-1818r^4+5940r^3+6060r^3-19800r^2-599940r$$

$$\cancel{9r^6}\cancel{-60r^5}+\cancel{100r^4}-\cancel{1818r^4}+12120r^3-588060r+88209r^2-$$

$$-\cancel{9801}-20200r^2+\cancel{980100} = \cancel{9r^6}+\cancel{100r^4}+91809r^2+\cancel{980100}-$$

$$-\cancel{60r^5}-\cancel{1818r^4}+5940r^3+6060r^3-19800r^2-599940r$$

$$120r^3 - 4000r^2 + 11880r = 0$$

$$3r^2 - 100r + 297 = 0, \quad \frac{D}{4} = 1609.$$

$$\left[\begin{array}{l} r = \dfrac{50+\sqrt{1609}}{3} > 10, \\ r = \dfrac{50-\sqrt{1609}}{3} \end{array}\right.$$

Ω что невозможно, т.к. δ полностью внутри

$$r = \frac{50-\sqrt{1609}}{3}$$

Ответ: $\dfrac{50-\sqrt{1609}}{3}$

№8

По индукции докажем, что для $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, можно ~~пред~~ найти два различных набора чисел, таких, что наборы попарных сумм чисел в этих наборах будут совпадать.

База: $k = 1$

$A = \{3, 4\} \longrightarrow S_A = \{7\}$

$B = \{1, 6\} \longrightarrow S_B = \{7\}$

~~S_A — n~~ Здесь и в дальнейшем S_N — набор всех попарных сумм чисел из набора N.

Переход.

Пусть для $n = 2^k$ есть наборы $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ такие, что $S_A = S_B$, и ~~наборы A и B~~ $A \neq B$. Покажем, что для $n = 2^{k+1}$ такие наборы так же существуют. ~~Возьмём константу $c \in \mathbb{N}$ такую, что любое из чисел $a_1+c, a_2+c, \ldots$ больше, чем любое из чисел~~

~~$b_1, b_2, \ldots, b_n$.~~

~~$A' = \{a_1, a_2, \ldots,$~~

~~$B' = \{a_1+c, a_2+$~~

~~состоять из~~

~~т.к. в набор~~

~~Возьмём~~

Возьмём к

$A' = \{a_1, a_2,$

$B' = \{b_1, b_2,$

$c \in \mathbb{N}$. ~~Оно~~

~~т.к. в не~~

Причём

$a_1+c, a_2+c,$

чисел $a_1,$

различн

встретятся

т.к. $A \neq B,$

что $S_{A'} =$

вида a_i+

~~$b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таким образом, Возьмём наборы наборы:~~
~~$A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1+c, b_2+c, \ldots, b_n+c\}$,~~
~~$B' = \{a_1+c, a_2+c, \ldots, a_n+c, b_1, \ldots, b_n\}$ Будут они~~
~~состоят из 2^{k+1} чисел и будут различны,~~
~~т.к. в наборе B'~~

~~Возьмём наборы: $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1+c, \ldots, b_n+c\}$~~

Возьмём наборы:
$A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1+c, b_2+c, \ldots, b_n+c\}$
$B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1+c, a_2+c, \ldots, a_n+c\}$, где
$c \in \mathbb{N}$. ~~Они состоят из 2^{k+1} чисел и различны,~~
~~т.к. в наборе B' точно не встретятся~~
Причём c такое, что любое из чисел $a_1+c, a_2+c, \ldots, a_n+c$ больше любого из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда эти наборы различны, т.к. в наборе B' точно не встретятся все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сразу, т.к. $A \neq B$, и состоят из 2^{k+1} чисел. Покажем, что $S_{A'} = S_{B'}$. В наборе $S_{A'}$ присутствуют числа вида $a_i + a_j$, $a_i + b_j + c$, $b_i + b_j + 2c$. (в послед-

нем ~~случае $i\neq j$). Набор $S_{B'}$ состоит из чисел вида~~ и в первом случае $i\neq j$).
Набор ~~из~~ $S_{B'}$ состоит из чисел вида b_i+b_j, a_i+b_j+c, a_i+a_j+2c (в первом и последнем случаях $i\neq j$). Значит, эти наборы совпадают, т.к. $S_A=S_B$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Для $\forall k\in\mathbb{N}$, для $n=2^k$ нельзя ~~однозначно~~ гарантировать однозначное восстановление набора чисел по набору попарных сумм.

Докажем, что если восстановление набора чисел невозможно, то $n=2^k$.
Возьмём различные наборы A и B такие, что ~~$A=\{a_1$~~ $S_A=S_B$.

$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

$\rceil f(x)=x^{a_1}+x^{a_2}+\ldots+x^{a_n}$

$\rceil g(x)=x^{b_1}+x^{b_2}+\ldots+x^{b_n}$

$$f(x)^2-f(x^2)=2\sum_{i\neq j}x^{a_i}\cdot x^{a_j}=2\sum_{i\neq j}x^{a_i+a_j}$$

$$g(x)^2-g(x^2)=2\sum_{i\neq j}x^{b_i}\cdot x^{b_j}=2\sum_{i\neq j}x^{b_i+b_j}$$

То есть, если $S_A = S_B$, то $f(x)^2 - f(x^2) = g(x)^2 - g(x^2)$.
$(f(x) - g(x))\,(f(x) + g(x)) = f(x^2) - g(x^2)$
$p(x) = f(x) - g(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n} - x^{b_1} - x^{b_2} - \ldots - x^{b_n}$
Тогда $x=0$, $x=1$ — корни многочлена $p(x) \Rightarrow$ исходя из теоремы Безу можем представить $p(x)$ в виде $p(x) = (x-1)^m \cdot q(x)$, где ~~q(x) не дел~~ $m \in \mathbb{N}$, а $q(x)$ не делится на $(x-1)$. Такой многочлен $q(x)$ точно найдется, т.к. в противном случае $p(x) = (x-1)^m \cdot c$, где $c = const$, не делится на x и, значит, x не является корнем $p(x)$, что противоречит выбору $p(x)$. (подразумевается, что $q(x)$ не является константой. Также стоит сказать, что $q(x)$ не тождественный ноль, т.к. $A \neq B$).
Таким образом, равенство
~~$f(x) - g(x)$ преобразуется в~~
$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = f(x^2) - g(x^2)$

преобразуется в:

$$(x-1)^m \cdot q(x) \cdot (f(x)+g(x)) = (x^2-1)^m \cdot q(x^2)$$

$$q(x) \cdot (f(x)+g(x)) = (x+1)^m \cdot q(x^2)$$

Подставим $x=1$.

$$q(1) \cdot (f(1)+g(1)) = 2^m \cdot q(1)$$

$q(1) \neq 0$, т.к. мы выбрали $q(x)$, не делящееся на $(x-1)$

$$f(1)+g(1) = 1^{a_1}+\dots+1^{a_n}+1^{b_1}+\dots+1^{b_n} = 2n$$

$$q(1) \cdot 2n = 2^m \cdot q(1)$$

$$2n = 2^m$$

$$n = 2^{m-1}$$

$\blacksquare$

Отдельно следует рассмотреть случай $n=2^0=1$. Здесь из набора попарных сумм нельзя однозначно восстановить ~~эт. набор~~ само количество чисел в исходном наборе.

Пример:

$A=\{7\}$

$B=\{3, 4\}$

$\Rightarrow S_A = S_B = \{7\}$.

Но я не ...
условие ...
в принц...
понятно...
суммах...

Но я не знаю, подразумевает ли условие задачи ~~Ваг~~ этот случай в принципе, т.к. здесь не очень понятно, как говорить о попарных суммах, если ~~не~~ нечего суммировать.