№1

$n \in [1; 2023] \Rightarrow НОД(n, 2024) = 1$

Теперь сейчас мы найдем сколько чисел от 1 до 2023 взаимнопростой с 2024 ($gcd(n, 2024) = 1$) их количество считается так $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$:

$$2023 - \left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2023}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2023}{23} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{22} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{46} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{253} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2023}{506} \right\rfloor = 2023 - 1011 - 183 - 87 + 91 + 43 + 7 - 3 =$$

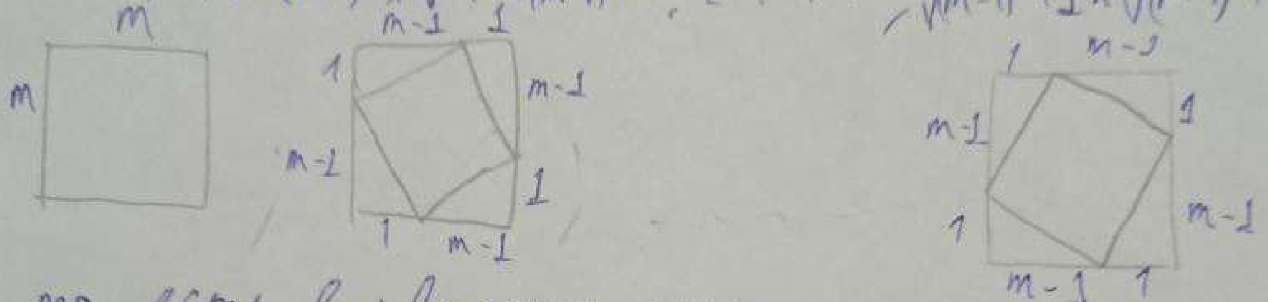
$= 880$: теперь ~~выроятностm~~ выроятность того что $НОД(n, 2024) = 1$ равно:

$$\begin{array}{l} 2023 \text{ — } 100\% \\ 880 \text{ — } x\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{880 \cdot 100}{2023} \quad x = \frac{88000}{2023}$$

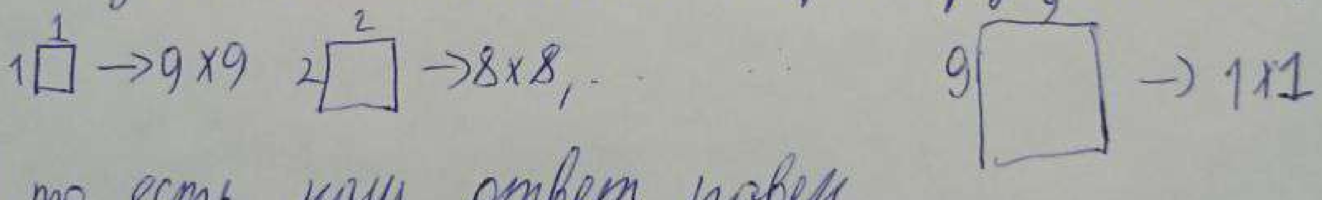
Ответ: $\frac{88000}{2023}\ \%$

№2

Количество квадратов которые вписаны в квадрат $m \times m$ таким образом что бы его вершины лежали на его сторонах столько же сколько квадратов $m \times m$. В квадрат $m \times m$ можно вписать m-квадратов стороны которого $m \times m$, $\sqrt{1^2+(m-1)^2} \times \sqrt{1^2+(m-1)^2}$; ... ; $\sqrt{(m-1)^2+1^2} \times \sqrt{(m-1)^2+1^2}$



то есть в квадрат $m \times m$ можно вписать m-квадратов. то есть нам нужно найти количество квадратов $m \times m$ внутри квадрата 9×9 и умножит на m а тепер для всех m найдём их количество и суммируем то есть



то есть наш ответ равен

$9 \cdot 9 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 2 + + \dots + 2 \cdot 2 \cdot 8 + 9 \cdot 1 \cdot 1 = 825.$

Ответ: 825

Я: Саймухудинзода Мухаммадидрис Мухаммад

№3

Так как всего четвёрок ($a, b, c, d \in (0 \dots 10)$) чисел равно 10^4

$\underset{10}{\square}, \underset{10}{\square}, \underset{10}{\square}, \underset{10}{\square} \Rightarrow (\square, \square, \square, \square) = 10^4$

можем постовит. То есть в нашей последователности найдётся две одинаковые четвёрки. Так как наша последователност идёт бесконечно допустим это наши четвёрки: 1) $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$; 2) $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$

1 решение:

a_i это i-тое число.

$\overbrace{|a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}|, \; |2, 0, 2, 3| \; b_{m-1}}^{k}$ $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ $\underbrace{\qquad}_{k\text{-элментов}}$ $b_{n-1} \, |a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}|$

b_{m-1}

$a_k, a_{(k+1)}, a_{(k+2)}, a_{k+3}$. пусть перед a_n это b_{n-1} а перед a_m это b_{m-1}

тепер т.к $a_m = a_n$, $a_{m+1} = a_{n+1}$, $a_{m+2} = a_{n+2}$, $a_{m+3} = a_{n+3}$

следователно $b_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} \equiv a_{m+3} \pmod{10}$

и $b_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \equiv a_{n+3} \pmod{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_{n-1} = b_{m-1} \Rightarrow$ $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3} = a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$

следователно:

индукция

$\dots |a_1, a_2, a_3, a_4| \underbrace{\dots}_{k} |a_1, a_2, a_3, a_4| \underbrace{\qquad}_{k} |a_1, a_2, a_3, a_4| \dots\dots$

то есть в общем гдето между двумя одинаковыми четвёрками находится 2, 0, 2, 3 доказали вначале

$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$

$|a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}| \underbrace{\; 2, 0, 2, 3 \;}_{k} |a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}| \underbrace{\qquad}_{k} |a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}|$

то есть после a_{k+3} число равно число после a_{m+3} и т.д следователно 2, 0, 2, 3 тоже будет между $|a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}|$ и $|a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}|$.

N 3

2 решение

начало одинаковое: 1) четв. = 2) четв.

1) четв. $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}$ a_i - iтое число. в послед.

2) четв $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3}$

$a_p = a_r$, $a_{p+1} = a_{r+1}$, $a_{p+2} = a_{r+2}$, $a_{p+3} = a_{r+3}$ значит $a_{p+4} = a_{r+4}$ и $a_{p-1} = a_{r-1}$ доказательство аналогично решение 1. тепер $a_{p+k_1} = a_{r+k_1}$ по индукции док. аналогично реш. 1 написано [индукция.; допустим $p > r$ и $a_{p-k_1} = a_{p-k_1}$ аналогично. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{p-(p-1)} = a_1 = a_{r-(ap-1)} \Rightarrow a_{r-(p-1)} = a_1 = 2$

и $a_{p-(p-2)} = a_{r-(p-2)} = a_2 = 0$

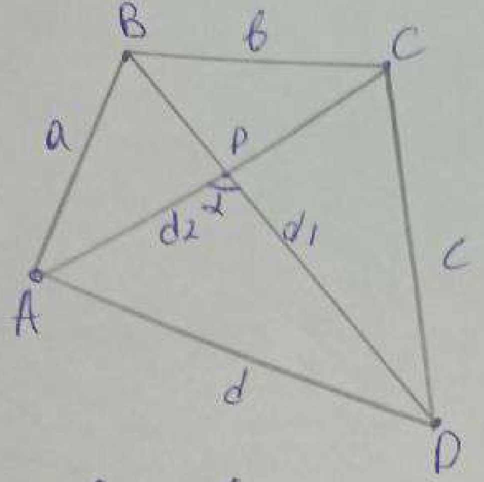
и $a_{p-(p-3)} = a_{r-(p-3)} = a_3 = 2$

и $a_{p-(p-4)} = a_{r-(p-4)} = a_4 = 3$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $(a_{r-(p-1)}, a_{r-(p-2)}, a_{r-(p-3)}, a_{r-(p-4)}) = (2, 0, 2, 3)$

№ 4



$AB = a$
$BC = в$
$CD = c$
$DA = d$
$BD = d_1$
$AC = d_2$
$\alpha - ?$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}$
$AB + BD + DC \leq 2$
$\Rightarrow a + d_1 + c \leq 2$
$AC \cap BD = P$

по равенству треугольников ($\triangle ABD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a + d_1 > d \qquad 2 \geq a + d_1 + c > d + c$

по равен. треуг. $\triangle ACD \Rightarrow d + c > d_2$

$2 \geq a + d_1 + c > d + c > d_2 \Rightarrow 2 > d_2$

$2 \geq a + d_1 + c > d_1 \Rightarrow 2 > d_1$

$\Rightarrow 4 > d_1 d_2 \mid \cdot \sin\alpha$

$4\sin\alpha > d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$

площад $\square ABCD = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}$ и $S_{ABCD} = \frac{d_1 d_2 \cdot \sin\alpha}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha}{2}$

$d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha = 1 \Rightarrow 4\sin\alpha > d_1 \cdot d_2 \sin\alpha = 1$

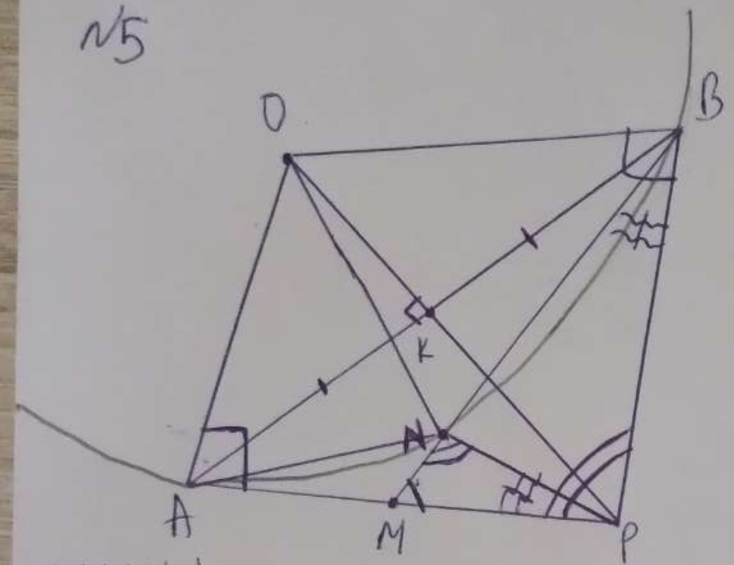
$1 \geq \sin\alpha > \frac{1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow \alpha \in (\arcsin 0{,}25,\ 180 - \arcsin 0{,}25)$

$\alpha \neq \arcsin 0{,}25$ и $\alpha \neq 180 - \arcsin 0{,}25$

Ответ: $\alpha \in (\arcsin 0{,}25,\ 180 - \arcsin 0{,}25)$

$\alpha \in$ от $\arcsin 0{,}25$ до $180 - \arcsin 0{,}25$ не включительно

№5



W(ANB) – описаная окружн. ок. ΔANB

$OP \cap AB = K$ (!) $2NM = PB$.

т.к. $AK = KB$ и $\angle OKA = \angle OKB = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = OB$ и $AP = PB$ т.к.

висота ~~?~~ есть и медиана

это только тогда когда Δ – равнобедренный.

$AM = MP$ и $OA = ON = OB$ – дано

$\angle OBP = \angle OAP = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow O, A, P, B$ – cyclic

раслотрим ΔANB т.к $OA = ON = OB \Rightarrow O$ – центр описанной окружности ΔANB. тепер раслотрим AP т.к $\angle OAP = 90$ и O – центр $\Rightarrow AP$ – касателная к $W(ANB)$. AP касателная к $W(ANB) \Rightarrow AM$ касателная к $W(ANB)$. тепер раслотрим степень точки относително точки M к $\Delta ANB \Rightarrow AM^2 = MN \cdot MB$

т.к $AM = MP \Rightarrow MP^2 = MN \cdot MB \Rightarrow \frac{MP}{MB} = \frac{MN}{MP}$ и

и $\angle BMP = \angle NMP \Rightarrow \Delta NMP$ подобен ΔBPM

т.к $\Delta NMP \approx \Delta BPM \Rightarrow \frac{MP}{NM} = \frac{BP}{NP} \Rightarrow \frac{NP}{NM} = \frac{BP}{MP}$

т.к $AM = MP \Rightarrow AP = 2MP$ т.к. $AP = PB \Rightarrow PB = 2MP \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{NP}{NM} = \frac{PB}{MP} = \frac{2MP}{MP} \Rightarrow \frac{NP}{NM} = 2 \Rightarrow 2NM = PN.$

ЧТД

Логин: losh2023-inf2143
Пароль: 9cbxEKTYMq

№ 7

$x+y+z=0$

пусть $K>6$ следователно

$$K\cdot(x^3+y^3+z^3)^2\le(x^2+y^2+z^2)^3$$

тогда если $K>6$ расмотрим пример

$x=1$ $y=-0{,}5$, $z=-0{,}5$ $\Rightarrow x+y+z=0$

$$K\cdot(1^3-(0{,}5)^3-0{,}5^3)^2\le(1^2+(0{,}5)^2+(0{,}5)^2)$$

$K\cdot 0{,}5625\le 3{,}375$ $K\le 6$ то есть если K ~~[illegible]~~ больше 6 будет неправилно.

пусть $K=6$

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z-z)(x+y+z-x)(x+y+z-y)=$$

$$=0-3\cdot(-x)(-y)\cdot(-z)=3xyz$$

$x+y+z=0$

$x+y=-z$

$(x+y)^2=z^2$

$$54\cdot x^2y^2z^2\le(x^2+y^2+z^2)^3$$

$$54\cdot(x^2y^2)\cdot((x+y)^2)\le((x^2+y^2+(x+y)^2)^3$$

$$54\cdot x^2y^2(x^2+2xy+y^2)\le(x^2+y^2+x^2+2xy+y^2)^3$$

$$54x^2y^2(x^2+2xy+y^2)\le(2x^2+2y^2+2xy)^3=2^3(x^2+y^2+xy)^3 \mid :2$$

$$27x^4y^2+54x^3y^3+27y^4x^2\le(x^2+xy+y^2)^3\cdot 4=$$

$$=4\cdot(x^6+y^6+x^3y^3+3x^5y+3y^5x+6x^4y^2+6y^4x^2+6x^3y^3)=$$

$$=4x^6+4y^6+12x^5y+12y^5x+24x^4y^2+24y^4x^2+28x^3y^3$$

продолжение N7:

$\cancel{27}x^4y^2+54x^3y^3+\cancel{27}y^4x^2 \le 4x^6+4y^6+12x^5y+12y^5x \cancel{+24x^4y^2}+$
$+\cancel{24y^4x^2}+\cancel{28}x^3y^3 \Rightarrow$

$3x^4y^2+26x^3y^3+3y^4x^2 \le 4x^6+4y^6+12x^5y+12y^5x;$

по AM$\geq$GM $\quad x^5y+y^5x \geq 2\sqrt{x^5y\cdot y^5x}=2x^3y^3 \Big|\cdot 12$

$12x^5y+12y^5x \geq 24x^3y^3$ и $x^6+y^6 \geq 2\sqrt{x^6y^6}=2x^3y^3$

$\Rightarrow 3x^4y^2+26x^3y^3+3y^4x^2 \le x^6+y^6+3(x^6+y^6)+12(x^5y+y^5x)$

$x^6+y^6+12(x^5y+y^5x) \geq 26x^3y^3$

поставим место $x^6+y^6+12(x^5y+y^5x)$ в уравнение

$3x^4y^2+\cancel{26x^3y^3}+3y^4x^2 \le 3(x^6+y^6)+\cancel{26x^3y^3} \Big|:3$

$x^4y^2+y^4x^2 \le x^6+y^6$

по AM$\geq$GM

$$+\begin{cases} x^4y^2=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y=\dfrac{6\cdot\sqrt[6]{x^6x^6x^6x^6\cdot y^6y^6}}{6} \le \dfrac{x^6+x^6+x^6+x^6+y^6+y^6}{6} \\ y^4x^2=y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot x\cdot x=\dfrac{6\cdot\sqrt[6]{y^6y^6y^6y^6x^6x^6}}{6} \le \dfrac{y^6+y^6+y^6+y^6+x^6+x^6}{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow x^4y^2+y^4x^2 \le \dfrac{x^6+x^6+x^6+x^6+y^6+y^6}{6}+\dfrac{y^6+y^6+y^6+y^6+x^6+x^6}{6}=x^6+y^6$

$\Rightarrow x^4y^2+y^4x^2 \le x^6+y^6 \Rightarrow$ Ответ: $k=6$

по AM$\geq$GM

$b_1+b_2 \geq 2\sqrt{b_1\cdot b_2}$ $\quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \geq 6\sqrt[6]{a_1\cdot a_2\cdots a_6}$