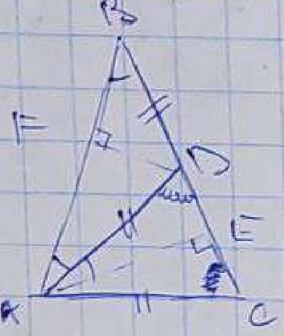
№1

Найдем $\sin 36^\circ$

Т. ΔABC с углами $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$



Пров AD — бисс.

Заметим что ΔADB и ΔADC — р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD = DA = AC$. $\exists\, BD = x$

но DF и AE пар высоты в этих Δках, ($\Rightarrow$ бисс тоже)

$\cos B = \frac{FB}{BD} \Leftrightarrow \cancel{\cos 36^\circ} \Rightarrow FB = x\cos 36^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 2x\cos 36^\circ \Rightarrow DC = 2x\cos 36^\circ - x \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \frac{2x\cos 36^\circ - x}{2}$

$\measuredangle\ \sin DAE = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \sin 18^\circ = \frac{\frac{2x\cos 36^\circ - x}{2}}{x} =$

$= \cos 36^\circ - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cancel{\sin 18^\circ = 2\cos^2 18 - 1}$

$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ ($\sin 18^\circ = t$)

$\Leftrightarrow 2t^2 + t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \Longleftrightarrow$ ($\sin 18^\circ > 0$)

$\Leftrightarrow t = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} =$

$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20-4\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

$\cos^2 36^\circ = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{8-5+\sqrt{5}}{8} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \Rightarrow \cos 36^\circ = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ($\cos 36^\circ > 0$)

$\cancel{\sin 6^\circ}$ $\sin\left(\frac{\pi}{30}\right) = \sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 30^\circ) =$

$\cancel{= \sin 36^\circ \sin 30^\circ + \cos 36^\circ \cos 30^\circ =}$

$= \sin 36^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 36^\circ =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{8} =$

$= \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8}$

(:) $\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{6} \cdot \sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1\right) > 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{5-\sqrt{5}} > 4 + 5\sqrt{5} + 5 \Leftrightarrow$ обе части больше 0

$\Leftrightarrow 25 \cdot 6 \left(5 - \sqrt{5}\right) > 81 + 2 \cdot 9 \cdot 5\sqrt{5} + 125 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 750 - 150\sqrt{5} > 206 + 90\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 544 > 240\sqrt{5} \Leftrightarrow 34 > 15\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1156 > 225 \cdot 5 \Leftrightarrow 1156 > 1125$ —

— верно.

Т. обр. $\sin\left(\frac{\pi}{30}\right) > 0{,}1$.

ч.т.д.

№2.

Т.к. числа 22 среди них обязательно найдутся min 2 числа оканчив на 0 (т.к. между ними растояние 10)

1. Построим, когда между ними нет перехода через сотню

∃ $S(x)$ – это функция обоз сумму цифр.

∃ Наше число из этой пары(тройки) n

∃ $S(n) = k$

Заметим, что число $n+11$ это хармад, ~~т.к. если оно не хармад.~~

то т.к. если оно не хармад, число $n-10$ хармад. ($n-10 \xleftrightarrow{9} n \xleftrightarrow{9} n+10\ n+11$; $\underbrace{n \ \ldots\ n+10}_{\text{наша пара}}$; конец.)

т.к. конец из 22 эл, то $n-10$ хармад.

И это против усл. выбора n

Тогда $S(n+1) = k+1$ (1)

$S(n+2) = k+2$ (2)

$S(n+10) = k+1$ (3)

$S(n+11) = k+2$ (4)

~~(1) и (3) ⇒ 9 ⋮ k+1~~

Заметим, что

$$\begin{cases} n+1 \vdots k+1 \\ n+10 \vdots k+1 \end{cases} \Rightarrow 9 \vdots b+1$$

$$\begin{cases} n+2 \vdots k+2 \\ n+11 \vdots k+2 \end{cases} \Rightarrow 9 \vdots b+2$$

Но делители числа 9 это 1 и 3 и 9, ни один из которых не отлич на 1 ⇒

⇒ Противоровоорчие

2. Есть переход через сотню в числах окан на 0

Значит одно из них окан на 90, другое на 00

~~Найти~~ ∃ число окан на 90 из пары (тройки) и

∃ $S(n) = k$ ∃ $n-1$ - хар шаг.

Тогда $S(n-1) = k+8$ (теперь окан на 89)

$$S(n+8) = k+8$$

$$\begin{cases} n-1 \vdots k+8 \\ n+8 \vdots k+8 \end{cases} \Rightarrow 9 \vdots k+8$$

Дел 9: 1 и 3 и 9. Един подход это $k=1$, но $S(n) \geq 9$ т.к. окан. на 90.

А $S(n) = 1$. ⇒ Противорение

3 теперь $n-1$ не хармад.
Тогда $n+20$ - хармад. (22 числа подряд)
8 Рассмотрим случай без перехода
относ $n' = n+10$ (способ будет работать
$4n+21$ - хармад).
Т. Обр. 22 подряд числа хармад
идти не могут

№3 $\max k: \begin{cases} k\left(x^3+y^3+z^3\right)^2 \le \left(x^2+y^2+z^2\right) \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Пусть $\left[\begin{array}{l} x\ne 0 \\ y\ne 0 \\ z\ne 0 \end{array}\right.$ (проверим потом)

Выберем из x, y, z переменные с одинаковым

(Можем т.к. во всех комб. есть $(+++, ++-, +--, ---)$)

Пусть для конкретности эти x и y

Тогда $z=-x-y$

Подставим: $k\left(x^3+y^3-(x+y)^3\right)^2 \le \left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \le \frac{8}{9}\cdot\frac{\left(x^2+xy+y^2\right)^3}{y^2x^2(x+y)^2}$ (3)

$\left(x^3+y^3-(x+y)^3\right)^2 > 0$

Посмотрим на случай когда $x=y$

$k \le \frac{8}{9}\cdot\frac{27\cdot x^6}{4\cdot x^6} = 6$

$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{x}{y}-\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x}+3=$

$=\frac{x^4(x+y)^2+y^4(x+y)^2+x^4y^2+x^3y(x+y)^2-x^3y^2(x+y)+y^3x(x+y)^2+3x^2y^2(x+y)^2}{x^2y^2(x+y)^2}=$

$=\frac{x^6+3x^5y+6x^4y^2+7x^3y^3+6x^2y^2+3xy^2+y^6}{x^2y^2(x+y)^2}$ (1)

$\left(x^2+xy+y^2\right)^3 = x^6+3x^5y+6x^4y^2+7x^3y^3+6x^2y^2+3xy^2+y^6$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow A=\frac{\left(x^2+xy+y^2\right)^3}{y^2x^2(x+y)^2}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{x}{y}-\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x}+3 \ge$

$\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}}+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\frac{x^2}{(x+y)^2}-\frac{x}{x+y}+3 \ge$ $t=\frac{x}{x+y}$

x и y одного знака $\Rightarrow \frac{x}{y}>0$

$\ge 7+t^2-t \ge 6\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$

$\min(t^2-t)=-\frac{1}{4}$

Также (3) $\frac{(x^2+xy+y^2)^3}{y^2x^2(x+y)^2} \geq \frac{9k}{8}$

Рассмотрим, когда $\frac{9k}{8} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow k=6$

Т.е. мы привели пример для ненулевых xyz и доказали, что $k>6$ не может быть

Теперь посмотрим случай с нулями

Пусть $z=0$

Т.е. $\begin{cases} k(x^3+y^3)^2 \leq (x^2+y^2)^3 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x^3-x^3) \leq (x^2+x^2)^3 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow$

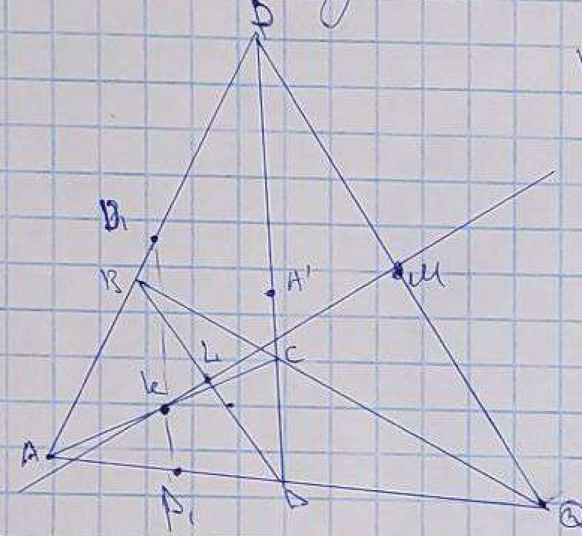
$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 8x^6 \text{ — верно} \\ x=-y \end{cases}$

Т.обр. нулевые переменные не ломают случай $k=6$

Ответ: $k=6$

№4

Заметим, что условие задачи это Th. Ньютона - Гаусса. Докажем ее.



K сер AC

L - сер BD

M - сер PQ

P_1 - сер AQ

A_1 - сер QP

D_1 - сер AP

D_1KP_1 - лех на одно прямой т.к. они все лежат на сред линии $\triangle APD$

Анал. P_1 L A_1 лех на одной прямой (сред. лин. $\triangle APD$)

Анал D_1 A_1 M лех на одной прямой Сред лин. $\triangle APQ$

Прим Th. Менелая к $\triangle APD$ и BQ

$$\frac{PB}{BA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{DC}{CP}=1\ (1)\ \text{т.к.}\ \frac{PB}{BA}=\frac{A_1L}{LP_1},\ \frac{DC}{CP}=\frac{P_1K}{KP_1},\ \frac{AQ}{QD}=\frac{D_1M}{MA_1}$$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{A_1L}{P_1L}\cdot\frac{P_1K}{KD_1}\cdot\frac{D_1M}{MA_1}=1\Rightarrow$$ по обратной

Th Менелая K L M лех на ~~пр~~ одной пр.

Т. Обр. по Th. Ньютона - Гаусса задача очевидна.

№5

(!) $\forall n \in \mathbb{N}\ \{(\sqrt{3}+1)^{2n+1}\} = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

1 $\forall n \in \mathbb{N}\ (\sqrt{3}-1)^{2n+1} < 1$. т.к. $\sqrt{3}-1 < 1$ (1)

$(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1} =$

$= (C_{2n+1}^{2n+1} + \sqrt{3}\, C_{2n+1}^{2n} + 3 C_{2n+1}^{2n} + \ldots + 3^n \sqrt{3}\, C_{2n+1}^{0}) -$

$- (C_{2n+1}^{0}\, 3^n \sqrt{3} - \ldots + C_{2n+1}^{2n} \sqrt{3} - C_{2n+1}^{2n+1} =$

$= C_{2n+1}(3^n \sqrt{3} - 3^n \sqrt{3}) + C_{2n+1}^{1} (3^n + 3^n) +$

$+ C_{2n+1}^{2} (3^{n-1} \sqrt{3} - 3^{n-1} \sqrt{3}) + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} (1+1) =$

$= 2 C_{2n+1}^{1}\, 3^n + 2 C_{2n+1}^{3}\, 3^{n-1} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$

Получилось целое число (2)

(1) & (2) $\Rightarrow [(1+\sqrt{3})^{2n+1}] = (1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

(!) $(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1} \vdots 2^{n+1}$ & $\not\vdots\, 2^{n+2}$.

База $n=0$ $(\sqrt{3}+1)^1 - (\sqrt{3}+1)^1 = 2 \vdots 2$ & $\not\vdots\, 4$

$n=1$ $(\sqrt{3}+1)^3 - (\sqrt{3}+1)^3 = 20 \vdots 4$ & $\not\vdots\, 8$

Шаг. $\exists\, n=k$ & $n=k-1$ - верно

(!) для $n=k+1$

$((\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1})((\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2) =$

$= (\sqrt{3}+1)^{2k+3} - (\sqrt{3}-1)^{2k+3} + (\sqrt{3}-1)^2 (\sqrt{3}+1)^2 (\sqrt{3}+1)^{2k-1} -$

$- (\sqrt{3}+1)^2 (\sqrt{3}-1)^2 (\sqrt{3}+1)^{2k-1} =$

$(\sqrt{3}+1)^{2k+3} - (\sqrt{3}+1)^{2k+3} + 4\left((\sqrt{3}+1)^{2k-1} - (\sqrt{3}-1)^{2k-1}\right) =$

$= \left((\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1}\right)\left((\sqrt{3}+1)^{2} + (\sqrt{3}-1)^{2}\right) =$

$= \underbrace{8}_{\vdots 2^3 \; \not\vdots 2^4} \underbrace{\left((\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k-1}\right)}_{\vdots 2^{k+1} \; \not\vdots 2^{k+2}} \Leftarrow A$

Т. обр. $A \vdots 2^{k+4}$ & $\not\vdots 2^{k+5} \rightarrow$

$\Rightarrow \left[(1+\sqrt{3})^{2n+1}\right] \vdots 2^{n+1}$ & $\not\vdots 2^{n+2} \rightarrow$

$\Rightarrow \left[(1+\sqrt{3})^{2023}\right] \vdots 2^{1012}$ & $\not\vdots 2^{1013}$

№8

4 $P_k = \sum_{i=1}^{C_n^2} y_i^k$ y_i - суммы попарные

4 $S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ - x_i - элемент исход мн-ва.

$$P_k = \sum_{i=1}^{C_n^2} y_i^k = \sum_{1\le i_1<i_2\le n} (x_{i_1}+x_{i_2})^k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\ne i_2}}^{n} (x_{i_1}+x_{i_2})^k = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i_1,i_2=1}^{n} (x_{i_1}+x_{i_2})^k - \sum_{i=1}^{n}(2x_i)^k\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\sum_{l=0}^{k} C_k^l x_{i_1}^{k-l} x_{i_2}^{l} - 2^k \sum_{i=1}^{n} x_i^k\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{l=0}^{k} C_k^l S_{k-l} S_l + \cancel{C_k^0 S_k} - 2^k S_k\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{l=1}^{k-1} C_k^l S_{k-l} S_l + C_k^0 S_k \cdot S_0 + C_k^k S_0 S_k - 2^k S_k\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(2n-2^k)S_k + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} C_k^l S_l S_{k-l}$$

$\exists$ $\frac{1}{2}(2n-2^k) \ne 0 \Leftrightarrow n \ne 2^{k-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ через S_k можно выразить (в сумме нет минусов) $P_1 \dots P_k$.
Вследствии, чего $P_1 \dots P_n$ опред. $S_1 \dots S_n$, через которые можно выраз $x_1 \dots x_n$ (систем из n уравн с n неиз, которая по Th Виета имеет реш)

Т. Обр. Вася $n \neq 2^m$ сможет определить исход числа.

(!) Что для $n = 2^m$ не возможно опред. точно.

База: $n=2$ $x_1 + x_2 = 5$ тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \end{array}\right.$

Шаг (!) $n = ?$ для k - верно

(!) для $n = 2k$

$\exists$ $A = \{a_1; \dots; a_n\}$ $B = \{b_1; \dots; b_n\}$ - искомые мн-ва.

Рассмотрим

$A' = \{a_1, \dots, a_n, b_1 + c, \dots, b_n + c\}$

$B' = \{b_1, \dots, b_n, a_1 + c, \dots, a_n + c\}$

, где $c \geq \max$ ($\cancel{a_1 + b_1}$ всех возмож сумм)

Пусть $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \rightarrow \begin{cases} a_1 + (b_1 + c) = (a_1 + c) + b_1 \\ (b_1 + c) + (b_2 + c) = (a_1 + c) + (a_2 + c) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Зн. Т. Обр. мы не можем однозн опред искомые мн-ва.

Т. Обр. Вася может опред искомые числа если $n \neq 2^m$.