№1.

Разложим 2024 на множители.

$2024 = 2^3 * 11 * 23$

Если НОД(n, 2024) = 1, то n взаимно просто с 2024, то есть n не делится на 2, 11 и 23.

Найдем количество чисел на отрезке [1; 2023], делящиеся на 2, 11 или на 23.

На 2 делится 2024/2 – 1 = 1011 чисел (т.к. делится на 2 каждое второе -> делим 2024 на 2 и вычитаем 1, т.к. 2024 в отрезок [1; 2023] не входит.

На 11 делится 2024/11 – 1 = 183 числа

На 23 делится 2024/23 – 1 = 87 чисел

Теперь посчитаем повторы.

На 2 и на 11 делится 2024/(2*11) – 1 = 91 число

На 2 и на 23 делится 2024/(2*23) – 1 = 43 числа

На 11 и на 23 делится 2024/(11*23) – 1 = 7 чисел

На 2, 11 и на 23 делится 2024/(2*11*23) – 1 = 3 числа

Тогда общее количество делящихся на 2, 11 или 23 чисел на отрезке равно 1011 + 183 + 87 – 91 – 43 – 7 + 3 = 1143 числа. (Я вычел числа, которые делятся на 2 числа сразу и прибавил делящиеся на 2, 11 и 23, т.к. мы дважды считаем каждое делящееся сразу на два разных число, и соответственно дважды такие числа вычитаем, думаю, подробнее объяснять не стоит)

Тогда чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 11, ни на 23 всего 2023 – 1143 = 880

(так как всего на отрезке 2023 числа)

Ответ: 880.

№3.

Докажем, что любая последовательность из 4 чисел (далее – четверка) повторится.

Рассмотрим произвольный ряд, удовлетворяющий условию. Разобьем его на «четверки» чисел. Возьмем такую четверку, что в ряду существует хотя бы еще одна такая же. По принципу Дирихле такая четверка найдется, так как ряд бесконечный, а разных четверок конечное количество. Для четверки, которая стоит левее, существует один вариант продолжения ряда, который будет, очевидно, повторяться, так как есть еще одна такая четверка. Ряд «зациклится» на повторении одного и того же набора цифр, стоящих в одинаковом порядке, то есть любая четверка повторяется в этом ряду бесконечное число раз. Утверждение верно и для ряда с четверкой 2, 0, 2, 3.

Ответ: да.

№2

Назовём данный клетчатый 9×9 полем. Докажем, что любой квадрат, вершины которого - отмеченные точки на поле, можно вписать в какой-то клетчатый квадрат, то есть его вершины лежат на ребрах какого-то клетчатого квадрата.

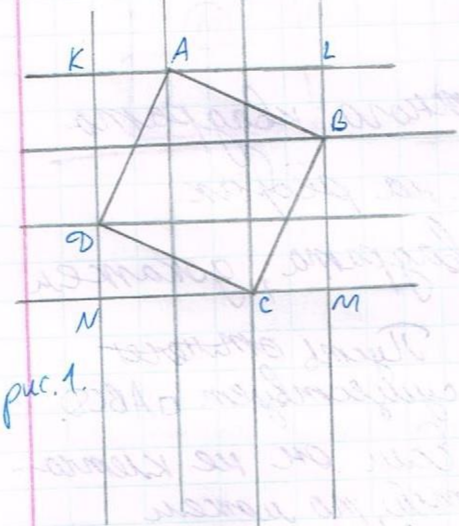


рис. 1.

Рассм. такой квадат □ABCD. Проведём прямые, проходящие через вершины □ABCD и ~~р~~ параллельные линиям сетки.

Четыре из них образуют клетчатый прямоугольник □KLMN.

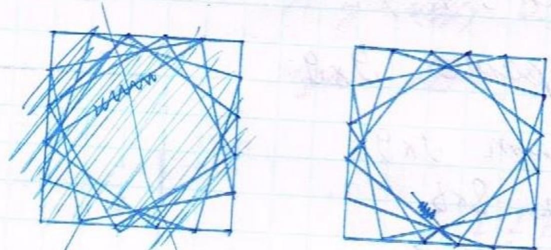
$\triangle ADK = \triangle BAL$:

1) $AB = AD$ как стороны квадрата
2) $\angle BAL = 90 - \angle DAK = \angle ADK$

$\Rightarrow$ прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и острому углу. Аналогично доказывается равенство $\triangle ADK = \triangle D\cancel{K}CN = \triangle CBM = \triangle BAL$, а из равенства тр-ков следует равенство сторон □KLMN => это квадрат.

(Доказательство справедливо для квадрата, ребра которого не лежат на линиях сетки)

Всего для квадрата со стороной n существует n квадратов, вершины которых лежат на ребрах этого квадрата; например:



Докажем и это.

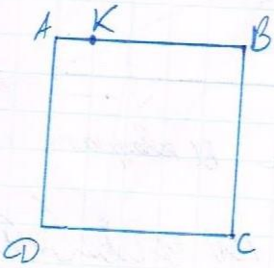


рис. 2

Возьмём квадрат с вершиной в точке K (как на рисунке). Для этой точки сущ. один квадрат, все вершины кот. лежат на ребрах квадрата □ABCD, так как:

вернемся к рис. 1. $\Delta KAD = \Delta LBA$, $[AK]$ и $[AL]$ определяют катеты этих тр-ков.

Так и на рис. 2: $[AK]$ и $[BK]$ – и есть катеты прямоугольных треугольников, образованных рёбрами ~~„вписанного"~~ квадратов => такой квадрат единственный для точки K, как вершины.

Полагаю, этого достаточно чтобы сказать утверждение выше про квадрат со стороной n.

~~Эт~~ Доказанного достаточно, чтобы посчитать то, что нас просят.

В квадрате 9×9:

1 квадрат 9×9

4 квадр. 8×8

9 квадр. 7×7

16 квадр. 6×6

25 квадр. 5×5

36 квадр. 4×4

49 квадр. 3×3

64 квадр. 2×2 (клетчатых) и 81 квадрат (1×1)

Очень легко посчитать по угловой клетке – найти возможные её положения и посчитать их количество.

А как мы уже сказали, для квадрата $n\times n$ есть всего n нужных нам квадратов, тогда ответ будет

$9\cdot1+8\cdot4+7\cdot9+6\cdot16+5\cdot25+4\cdot36+3\cdot49+$
$+2\cdot64+1\cdot81=825$

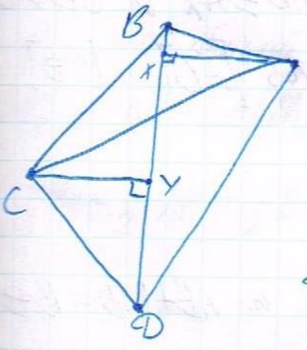
Ответ: 825

№4

Рассм. такой ▱ABCD, удовл. условию.
Опустим на [BD] перпендикуляры
[AX] и [CY]. |AX| и |CY| – кратчайшие
расстояния от A до (BD) и от C до
(BD) соотв. Тогда $AB \geq AX$; $CD \geq CY$;
$AC \geq AX + CY$.

$\Rightarrow$

$S_{▱ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BD\cdot AX + \frac{1}{2} BD \cdot CY = \frac{1}{2}$



$\Rightarrow BD(AX+CY)=1$

заменим AX и CY на AB и CD
и получим

$BD(AB+CD) \geq 1.$

По неравенству о средних

$$\sqrt{BD\cdot(AB+CD)} \leq \frac{BD+(AB+CD)}{2}$$

$$1 \leq \frac{BD+AB+CD}{2}$$

$$BD+AB+CD \geq 2,$$

а т.к. по усл. $AB+CD+BD \leq 2$, то

$AB+BD+CD=2 \Rightarrow AB+CD=2-BD$

$\sqrt{BD(AB+CD)} \geq 1$ и $\sqrt{BD(AB+CD)} \leq \frac{AB+BD+CD}{2}=1$

$\Rightarrow BD(AB+CD)=1$

$BD\cdot(2-BD)=1$

$BD^2-2BD+1=0$

$(BD-1)^2=0$

$BD=1$

$AB+CD=2-1=1$

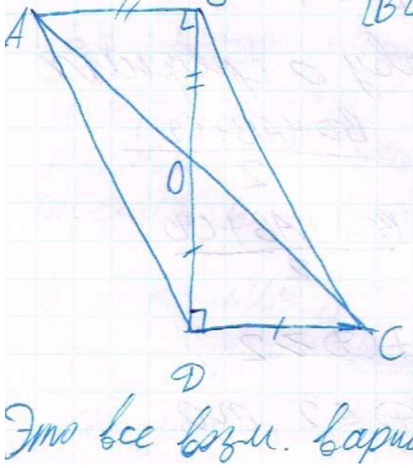
Вспомним, что $BD(AX+CY)=1$

и получим, что $AX+CY=AB+CD$,

а т.к. мы уже сказали, что $AB\geq AX$ и $CD\geq CY$,

то $AD=AX$; $CD=CY$, то есть $[AB]$ и $[CD]$

перпендикулярны (BD)



$[BD]\cap[AC]=O$

$\Delta ABO \sim \Delta CDO$ и $AB+CD=BD$

$\Rightarrow AB=BO$; $CD=DO$

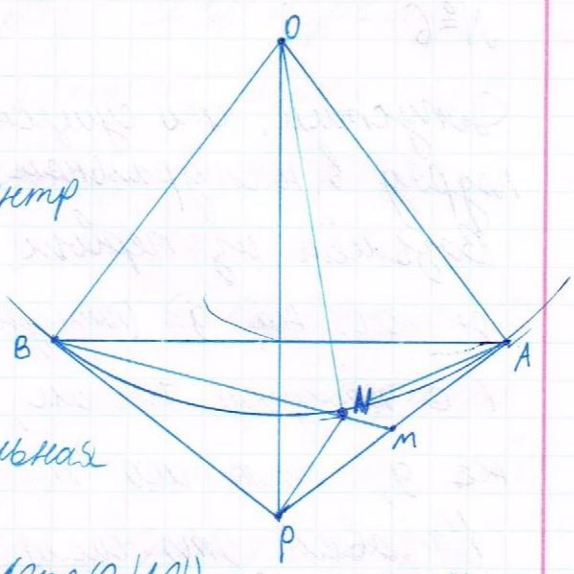
т.е. ΔABO равноб. прямоуг.,

тогда $\angle AOB=45^\circ$,

$\angle BOC=180^\circ-\angle AOB=135^\circ$.

Это все возм. варианты. Ответ: 45° или 135°

№5



Точка O равноудалена от A, B и N => O - центр описанной около $\triangle ABN$ окружности.

$[AO]$ - радиус этой окр.,
$(AO) \perp (AP)$ => (AP) - касательная этой окр.

N - точка пересечения окр.$(O; |AO|)$ и медианы $\triangle ABP$ - отсюда следует, что N - точка Шалтая $\triangle ABP$ и $\angle APN = \angle PBM$.

Рассм. $\triangle BMP$ и $\triangle PMN$:

1) $\angle BMP$ общий
2) $\angle MBP = \angle APN$ по доказанному выше

$\Rightarrow \triangle BMP \sim \triangle PMN$ по двум углам

$PM = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} BP$ $\qquad \frac{PM}{BP} = \frac{NM}{PN}$ по подобию тр-ков

$\frac{NM}{PN} = \frac{1}{2} \Rightarrow PN = 2NM$.

№6

Допустим, что существуют 22 ~~б~~ будущих подряд в натуральном ряде чисел харшад. Возьмём из первых двадцати число, оканч. на 9. (последняя цифра увел. на 1 с каждым числом, если последняя цифра не 9, так что такое число найдётся) Назовём это число a_i, тогда число a_{i+2} $(a_{i+2} = a_i + 2)$ оканчивается на 1, но чётность суммы его цифр не изменилась только если был переход через чётное число разрядов (хотя бы через 2 разряда), ведь если переход был через один разряд, то предпоследняя цифра увеличилась на 1, а последняя осталась нечётной, тогда у чисел a_i и a_{i+2} разная четность суммы цифр;

и a_i, и a_{i+2} нечетные и не могут делиться на ~~т~~ чётную сумму цифр, а у одного из них она чётная

Итак, если ~~были~~ в ряде есть переход через разряд, он должен быть переходом хотя бы через 2 разряда. Но на отрезке из 22-ух чисел обязательно будет ~~не~~ 2 перехода через разряд, и быть переходами через 2 и более разрядов они оба ~~бы~~ не могут, ведь переход через 2 разряда в натуральном ряде - это только каждое сотое число, а на нашем отрезке их всего 22
(а переход через большее число разрядов встречается в ряду ещё реже)
Расписал как только мог, надеюсь, дыр нету.