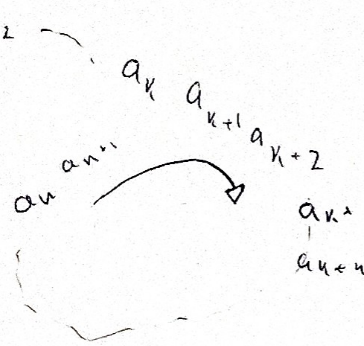
4)

1) Очевидно, что с каких бы 4х элементов мы не начали (дальше 4 подряд идущих элемента я называю "числами") то мы попадём в цикл, т.к. количество "чисел" конечно, а продолжать последовательность можно бесконечно.

2) Допустим ~~цикл~~ последовательность выглядит так:



в таком случае мы не вернёмся к начальным элементам, поэтому докажем, что такого быть не может. a_{k+4} получено 2мя способами (предполагаем, что разными, иначе цикл просто сократится на 1 элемент)

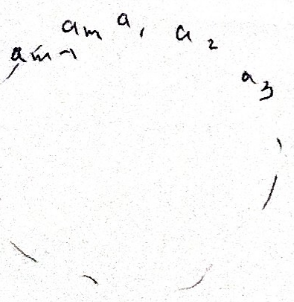
$$a_k + a_{k+1} + \cancel{a_{k+2}} + \cancel{a_{k+3}} \overset{10}{\equiv} a_{n+1} + \cancel{a_{k+2}} + \cancel{a_{k+3}} + a_{k+1}$$

$$a_k \overset{10}{\equiv} a_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$a_k = a_{n+1}$, т.к. $a_k, a_{n+1} \le 9$ (это цифры.

3) Из док. описанного в п.2, мы смогли сделать цикл короче и приблизить его к началу, проделав эту операцию несколько раз мы получим:



=> Если мы начнём с 2, 0, 2, 3, то придём обратно.

Ответ: да.

1) Предположим что это не так, тогда верно следующие

$a + c - 4b^2 > \frac{1}{4}$

$a + b - 4c^2 > \frac{1}{4}$

$c + b - 4a^2 > \frac{1}{4}$

Сложим все неравенства:

$2a + 2c + 2b - 4b^2 - 4a^2 - 4c^2 > \frac{3}{4}$

Перенесём всё в левую часть и домножим на -1.

знак поменялся

$$\underbrace{\left(4a^2 - 2a + \frac{1}{4}\right)}_{(2a-\frac{1}{2})^2} + \left(4b^2 - 2b + \frac{1}{4}\right) + \left(4c^2 - 2c + \frac{1}{4}\right) < 0$$

Выделим полный квадрат:

$$\left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2c - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$$

– очевидное противоречие сумма квадратов не может быть меньше 0, значит изначальное предположение было неверным $\Rightarrow$ одно из выражений $\leq \frac{1}{4}$.

2) Вероятность будет считаться по формуле:

$P(A) = \frac{m}{n}$; m – хороших исходов, n – всех исходов.

Посчитаем количество ~~из~~ взаимно-простых чисел с 2024 в диапазоне от 1 до 2023

Разложим на простые:

$2024 = 11 \cdot 23 \cdot 2^3 \Rightarrow НОД(i; 2024) = 1$, если $i \not\vdots 11$, $i \not\vdots 23$, $i \not\vdots 2$

Посчитать количество таких чисел можно без формулы включения - исключения следующим образом:

от 1 до 2023 на 11 делятся $2023 // 11 = 183$ (перевес в сторону нечетных => 92 нечетных делятся на 11)

для 23, $2023 // 23 = 87$ (перевес в сторону нечетных => их 44)

для 2, $2023 // 2 = 1011$

Итого

числа которые делятся на 11 и 23 одновременно, но это ед. что нужно добавить.

$m = 2023 - 1011 - 44 - 92 + 4 = 880$

$n = 2023$

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{880}{2023} \approx 0{,}43$

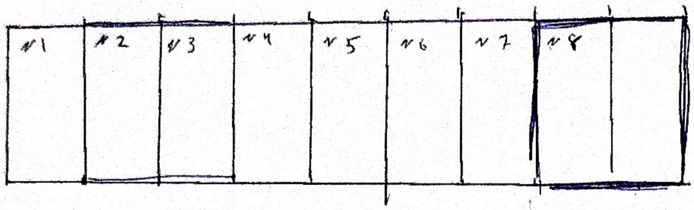
Ответ: 0,43

3

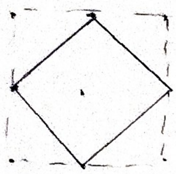
1) Рассмотрим квадраты со стороной 1 их $9 \times 9 = 81$

2) Рассмотрим квадраты 2×2 их $8 \times 8 = 64$

Эти квадраты мы рассматриваем со всеми наложениями. В строке может поместиться 8 квадратов таким образом



и в столбце их столько же.



Заметим что в квадрат можно вписать ещё один как показано на рисунке. Причем каждый перевернутый квадрат можно вписать в квадрат 2×2, так и наоборот. => их количество одинаково.

Из п. 2 мы получили ещё $8 \times 8 \cdot 2 = 128$ кв.

3) Проделав операции как показано в п. 2 можно убедиться, что в квадрате 3×3 два ромба в 4×4 3 ромба и т.д., получим ромбов столько же сколько и свободных точек // ч.

4) Из предыдущих рассуждений получаем формулу:

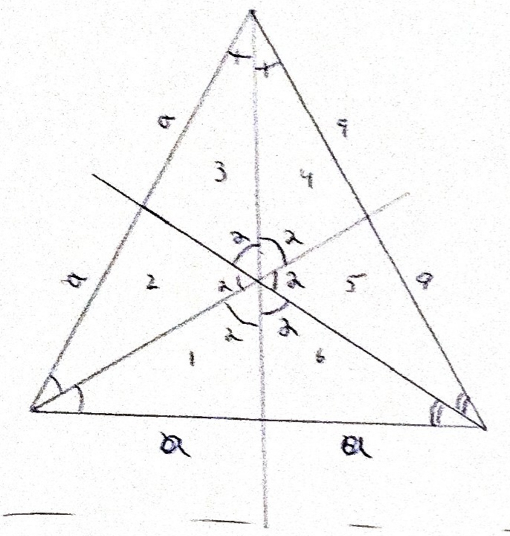
$$1 \cdot n^2 + (1+1)(n-1)^2 + (1+2)(n-2)^2 \dots (n + n-1) \cdot (n-(n-1))^2$$

n – длина стороны большого квадрата.

Подставим и посчитаем, получим ответ: 825

Ответ: 825

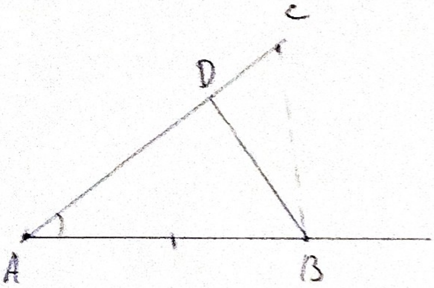
5)



Для удобства пронумеруем Δ, как показано на рис.

1) Докажем равенства Δ1 = Δ2, Δ4 = Δ3, Δ5 = Δ6.

Для этого нужно доказать признак равенства по углу, стороне и периметру. Т.е. доказать что Δ строится единственным образом:



Построим луч, отложим на нём длину стороны (AB). Отложим угол равный данному и построим ещё один луч (AC). Теперь отметим точку D, таким образом, чтобы AB + AD + DB = P,

P – периметр данный нам. Предположим, что есть такая точка C, что AC + CB + AB = P, (C отличная от D). Такого быть не может, т.к получается что

$AB + CB + AC = AB + AD + DB$

$CB + AC = AD + DB$ ($AC > AD$, $DC + CB > DB$ (по неравенству Δ))

~~CB + AB = AB +~~

=> Такого быть не может и точка D определяется единственным образом.

2) Отметим углы α на рисунке их мы получили из вертикальности и равенства Δ, теперь докажем равенства Δ4 = Δ5, Δ3 = Δ2, Δ1 = Δ6, по выведенному признаку описанный в п.1, тогда из совокупности 2х равенств Δ4 = Δ3, Δ5 = Δ6, Δ1 = Δ2 и Δ4 = Δ5, Δ6 = Δ1, Δ2 = Δ3, получаем что все треугольники попарно равны. На рисунке отмечены стороны длиной a, все стороны большого Δ = 2a => треугольник правильный. ч.т.д.

б).

1) Заметим, что если есть хотя-бы один столбец или строка с нечётной суммой, то есть второй столбец / строка с нечётной суммой. Докажем это через подсчет 2мя способами.

а) Посчитаем сумму по столбцам, если у нас есть один нечетный столбец, то и сумма нечетна (99 четных + 1 нечетный).

б) Теперь посчитаем по строкам, если они все четные, то и сумма всей таблицы четная, противоречие. Значит есть нечетная строка

Из п. 1 следует, что если первый сделает один столбец/строку нечетной, то победит.

2) Стратегия за первого игрока:

1) Ставим 1 куда-нибудь (например в угловые клетки)
2) Ставим 2-ю 1 на одной линии с первой, таким образом, чтобы на этой линии не стояло 0.
3) Ставим 1 не на этой линии до самого конца или ставим там 1 если второй поставил 0

Доказательство:

1) Шаг 2 всегда осуществим, т.к. клетку пересекают 2 линии
2) 1й победит, т.к на выбранной линии уд последнего хода всегда будет на 2 единицы больше, чем 0, а последний ход будет за вторым, поэтому он поставит 0 в последнюю клетку «нашей» линии и получится x нулей и x + 2 единиц. $x + x + 2 = 100$

$2x = 98$

$x = 49$

$x + 2 = 51$ единиц нечетно.

Ответ: первый

7 Предположим, что такое возможно, тогда:

1) Рассмотрим последовательность этих чисел (их четность)

Число n	Н Ч Н ...
Сумма цифр S	Н Ч Н ...

То есть сумма цифр должна совпадать с числом четностью, иначе, если четность не совпадает, то будет, например, Н − Ч,

S − Н → Н+1 − Ч, S+1 − Ч, Н ≠ Ч

2) Числа > 10, так что будет переход через какой-нибудь разряд (10^{2k+1}, 10^{2n}), рассмотрим для четного и нечетного разряда, например 10 и 100, отсюда будет понятно и про другие степени:

Переход через 10: $\overline{ab9} + 1 = \overline{a\,b{+}1\,0}$

$S \to S+1-9 = S-8$, четность S не изменилась, а значит n и S стали разной четности. Из п.1 следует, что такого быть не должно, иначе $n \neq S$.

Переход через 100: $\overline{ab99} + 1 = \overline{a\,b{+}1\,00}$

$S \to S+1-9-9 = S-17$, четность сменилась.

3) Из п.1 и п.2 следует, что последовательность может иметь переход только через четную степень 10, но не может иметь переход через нечетную, тогда оценка на максимальную длину такая:

$$\underbrace{10^{2k}-10 \dots 10^{2k}-1}_{10}\ \underbrace{10^{2k}}_{1}\ \underbrace{10^{2k}+1 \dots 10^{2k}+10}_{10}$$

Итого: $10 + 1 + 10 < 22$ => оценка меньше, и так быть не может.