№1

Докажем от противного. Пусть все эти числа $> \frac{1}{4}$. Это значит, что выполняются неравенства:

$a+c-4b^2 > \frac{1}{4}$, $a+b-4c^2 > \frac{1}{4}$, $b+c-4a^2 > \frac{1}{4}$, перепишем эти неравенства в виде: $a+c > \frac{1}{4}+4b^2$, $a+b > \frac{1}{4}+4c^2$, $b+c > \frac{1}{4}+4a^2$

и сложим их между собой: $2(a+b+c) > \frac{3}{4}+4(a^2+b^2+c^2)$,

или $8(a+b+c) > 3+16(a^2+b^2+c^2)$, переносим левую часть вправо и выполняем преобразования:

$16a^2-8a+1-1+16b^2-8b+1-1+16c^2-8c+1-1+3<0$

$$(4a-1)^2+(4b-1)^2+(4c-1)^2<0$$

Сумма квадратов не может быть меньше 0, значит исходное предположение неверное, а это означает, что найдётся среди этих трёх чисел хоть одно не больше, чем $\frac{1}{4}$.

№2

Вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов. Число благоприятных исходов - это кол-во натуральных чисел от 1 до 2023, взаимно простых с 2024 (это по условию), а общее число исходов кол-во натуральных чисел от 1 до 2023, которое равно 2024.

Кол-во взаимно простых чисел натуральных чисел, с заданным числом которое не больше его, найдем с помощью функции Эйлера. Учтём, что $2024=2^3\cdot 11\cdot 23$. Тогда

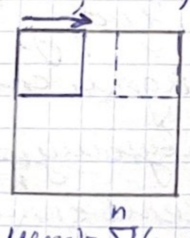
$\varphi(2024)=\varphi(2^3\cdot 11\cdot 23)=(2^3-2^2)\cdot(11-1)\cdot(23-1)=880$

Следовательно, искомая вероятность равна: $P(\text{НОД}(n,2024)=1)=\frac{880}{2024}\approx 43\%$

N3

Назовём прямым квадратом, квадрат, стороны которого параллельны сторонам клетки, а диагональным квадратом квадрат, стороны которого параллельны диагоналям клетки, тогда искомое число разных квадратов равно сумме прямых и диагональных квадратов, вершины которых окажутся в точках исходного клетчатого квадрата 9×9

1. Найдем сначала число прямых квадратов. Пусть n - это количество клеток в одной стороне исходного квадрата, а $1 \le k \le n$, кол-во клеток в квадрате, который можно разместить в исходной области так, чтобы он не выходил за её границы, (пример для области 5×5 показан на следующем рисунке, на нём $n=5$, $k=2$).



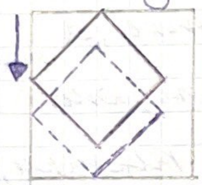
Квадрат со стороной k можно переместить вдоль горизонтальной или вертикальной стороны исходной области $(n+1-k)$ раз, значит всего у него может быть $(n+1-k)^2$ размещений внутри исходной квадратной области со стороной n клеток. Всего может быть прямых квадратов со сторонами k, равными от 1 до n:

$$N(\text{прямых}) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^2$$

Для $n=9$ кол-во прямых ква-ов равно: $N(\text{прямых})$: $1^2+2^2+3^2+ \ldots + 9^2 = 1+4+9+16+25+36+49+64+81 = 285$

2. Теперь посчитаем кол-во диагональных квадратов. Пусть m - сторона квадрата, размещённого внутри исходной квадратной области. Ясно, что m (измеряемое в диагоналях одной исходной клетки) не может быть больше, чем $M = [\frac{n}{2}]$, здесь $[\,]$ - целая часть

числа (см. рис. для $n=5$, $m=2$), т. е. m изменяется от 1 до M.



Этот внутренний квадрат можно переместить вдоль горизонтальной и вертикальной стороны исходного квадрата $(n-2m+1)$ раз, значит всего он может занимать $(n-2m+1)^2$ положений, следовательно, общее число диагональных квадратов с разными сторонами m равно ~~$N(\text{диагональных}) = \sum_{m=1}^{M}(n-2m+1)^2$~~

$$N(\text{диагональных}) = \sum_{m=1}^{M} (n-2m+1)^2$$

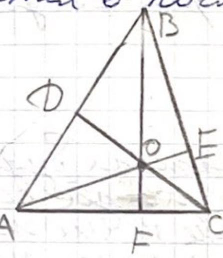
Для $n=9$: $M=[9/2]=4$, $N(\text{диагональных}) = 8^2+6^2+4^2+2^2 = 64+36+16+4 = 120$

Значит всего может быть $285+120=450$ разных квадратов.

Проверим полученные формулы для примера, приведённого в условии: $N(\text{прямых}) = 1^2+2^2 = 5$, $N(\text{диагон.}) = 1^2 = 1$. Всего $5+1=6$ квадратов.

N4

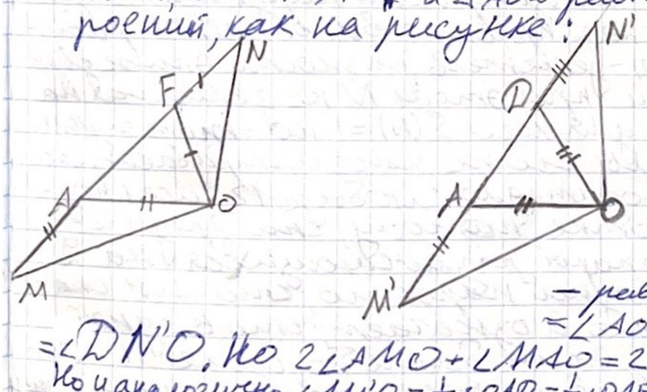
В условии задачи дано правило, как по четырём рядом стоящим цифрам определять следующую цифру. ~~Эх~~ Попробуем сделать наоборот: по четырём рядом стоящим цифрам $abcd$ определить предшествующую им цифру x. Поскольку цифра d следует за четвёркой цифр $xabc$, то цифра d равна последней цифре суммы $x+a+b+c$ и, значит, $x+a+b+c=10k+d$ при некотором целом k. Отсюда $x=10k+(d-a-b-c)$. Поскольку x – цифра, то из последнего выражения следует, что x равен остатку от деления на 10 числа $(d-a-b-c)$. Разделить число p на число q с остатком, — значит, найти числа s и r такие, что $p=sq+r$ и $0 \le r < q$. (Притом, что остаток от деления числа -13 на 10 равен 7, а не -3.) Остаток от деления одного целого числа на другое определяется однозначно, значит, цифра x также определяется однозначно. Например, чтобы определить цифру, предшествующую четвёрке 2,0,2,3, надо от 3 отнять 2,0,2 и разделить полученное число (-1) с остатком на 10. В остатке получим 9, значит цифра 9 предшествует четвёрке 2,0,2,3. Мы доказали следующее утверждение: двум одинаковым четвёркам цифр, стоящих рядом в последовательности 2023 72 469..., предшествует одна и та же цифра. Поскольку различных четвёрок цифр конечное число, а именно, 10000 штук, — то в бесконечной последовательности 2023 72469... какая-то четвёрка встретится вторично. Пусть это будет четвёрка цифр a, b, c, d. Тогда последовательность имеет вид 202372...xabcd...yabcd... Напишем под этой последовательностью эту же последовательность ещё раз но "сдвинутую" так, чтобы под первой четвёркой abcd оказалась вторая. Согласно доказанному выше утверждению x=y. Аналогично, совпадают цифры и в предшествующих этим столбцах, и так далее. Поэтому под четвёркой 2023 в "верхней" последовательности стоит четвёрка 2023 в "нижней" последовательности. А это и означает, что четвёрка 2023 встречается в последовательности 202372... вторично.



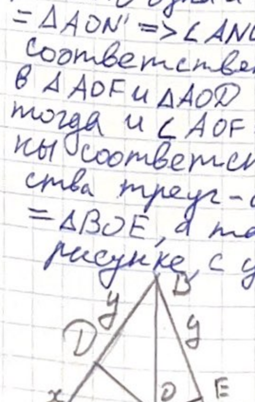
N5.

Дано: CD, AE, BF - биссек. углов: ∠ACB, ∠CAB, ∠ABF соответственно, AF+FO+OA = AO+OD+AD = OD+DB+OB = OB+OE+EB = OE+OC+CE = OC+OF+FC. ~~Надо~~

Док-ть: △ABC - правильный (равносторонний). Докажем сначала, что △AOF и △AOD равны. Для этого сделаем ряд построений, как на рисунке:



В △AOF и △AOD углы ∠OAF и ∠OAD равны (т.к. AE - биссек. ∠CAB), а AF+FO = AD+DO, т.к. AO - общ., а $P_{\triangle AOF} = P_{\triangle AOD}$. По построению: AO = AM, FN = FO, AO = AM', DN' = DO, т.е. △AOM, △NOF, △AOM', △N'OD — равнобед. Это значит, что ∠AMO = ∠AOM, ∠FON = ∠OFN, ∠AM'O = ∠AOM', ∠DON' = ∠DN'O. Но 2∠AMO + ∠MAO = 2∠AMO + 180° − ∠OAF => ∠AMO = ½∠OAF. Но и аналогично ∠AM'O = ½∠OAD = ½∠OAF, т.е. ∠AM'O = ∠AMO, аналогично можно док-ть, что и ∠FNO = ½∠OAF, и ∠DN'O = ½∠ADO. В △AON и △AON' равны 2 стороны и угол между ними. Действительно, ∠OAF = ∠OAD, сторона AD одна и та же, а AN = AF+FN = AF+FO = AD+DO = AD+DN' = AN', т.е. △AON = △AON' => ∠ANO = ∠AN'O, ∠AFO = ADO как удвоенные углы ∠FNO и ∠DN'O соответственно => оставшиеся углы тоже равны. Это значит, что в △AOF и △AOD одна сторона общ., углы ∠OAF = ∠OAD, ∠AFO = ∠ADO, но тогда и ∠AOF = ∠AOD, т.е. одна сторона и прилежащие к ней углы равны соответственным элементам другого △, т.е. по признаку равенства треуг-ов △AOF = △AOD. Аналогично док-ется, что △BDO = △BOE, а также △COE = △COF. Сделаем обозначения, как на след. рисунке, с учётом проведённого док-ва.



По свой-ву биссек. CD: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$, т.е. $\frac{x}{y} = \frac{x+z}{y+z}$, отсюда $\frac{x}{y}z = z$ т.е. x=y. Аналогично док-ется, что x=z и y=z => x=y=z. Т.е. x+y=y+z=x+z, а это означает, что AB=BC=AC, т.е. △ABC - равносторонний (правильный) ЧТД.

N6

Всегда выиграет I-ый игрок, если он будет играть правильно. Он может играть, как угодно, до последнего хода. Пусть остаётся 2 не занятые клетки. Они либо лежат в разных строках, либо лежат в одной строке, но в разных столбцах. Пусть для определённости это будут строки, т.е. незанятые клетки лежат в разных строках. Если обе неполных строки имеют чётную сумму на этот момент, то I-ый игрок ставит 1 в любую строку, и она становится нечётной. Если одна строка имеется нечётная, то I-ый игрок ставит 1 в другую строку и она становится нечётной, т.е. в итоге одна строка минимум будет нечётной всегда. Но кол-во ходов чётное, значит будет поставлено 50 ед., т.е. на доске будет чётная сумма этих единиц, следовательно одна строка не может остаться нечётной, их должно быть не меньше двух, а это и означает, что I-ый игрок всегда должен выиграть.

N7

Разобьём натуральный ряд на сотни, каждая будет иметь вид $\overline{k00}$; $\overline{k99}$, т.е. k — одно и то же, а две остальные цифры разные. Покажем, что в сотне не может быть 11 идущих подряд харшадов. Пусть число N - харшад, тогда $S(N)$ - сумма его цифр. Для харшада (если это не число 100), как правило выполняется равенство: $S(N) = S(N+9)$, т.е. $S(N)$ - делитель разности этих двух чисел, а именно - 9. Если при этом N не делится на 3, это означает, что для него $S(N)=1$, но этот случай нам не подходит, и мы его не рассматриваем. Рассуждение выше подходит для любых 12 чисел подряд в одной ~~строке~~ сотне, потому что среди 12 чисел есть только 3 пары, различающиеся на 9. Как минимум для одной пары то, что мы сказали, справедливо, а это и означает, что в одной ~~строке~~ сотне не может быть больше 11 харшадов подряд, ну в двух последовательных сотнях их не может быть больше, чем 22 подряд.