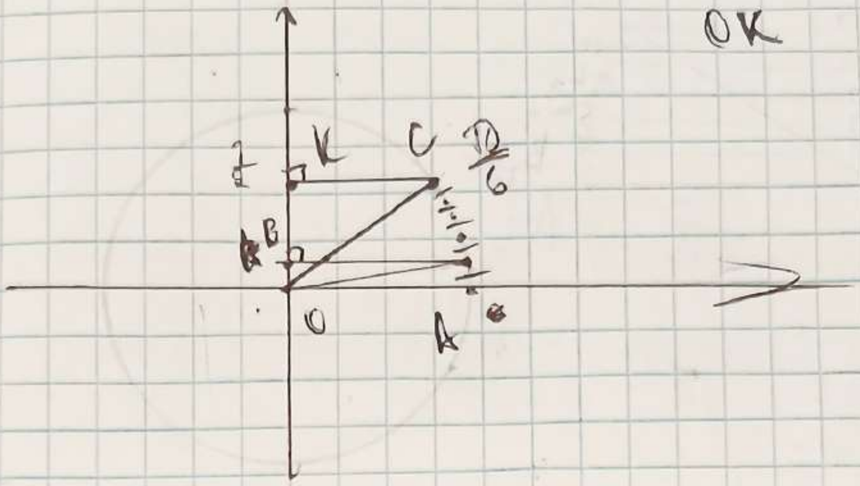
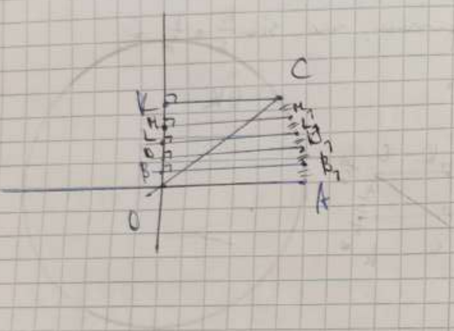
№1 Заметим, что $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и OK



$\sin\frac{\pi}{30} = OB$. Нам помогло бы сказать, что $OB > \frac{1}{10}$. Докажем это ~~следующим~~ так: ~~[illegible]~~: разделим меньшую дугу AC на 5 равных дуг и из точек, которые мы отметили, проведем перпендикуляры на OK. Между получившимися 6 перпендикулярами заключено 5 отрезков внутри отрезка OK. Мы хотим сказать, что OB – наибольший из этих 5 отрезков. Тогда мы доказали задачу.



Мы хотим проверить следующее утверждение: $OB > BD > DL > LM > MK$

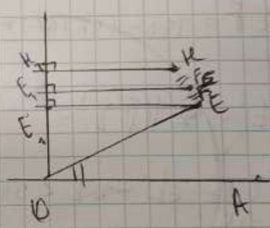
~~Докажем, что $OB > BD$~~

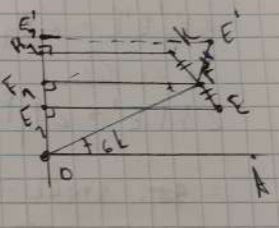
Пусть мы будем рассм-ть из точек B_1; D_1; L_1; M_1 и хотим доказать, что перпендикуляры из выбранной и предыдущей точки отсекают отрезок больший, чем перпендикуляры из выбранной и следующей точки.

Заметим, что $\smile AB_1 = \smile B_1D_1 = \smile D_1L_1 =$

$= \smile L_1M_1 = \smile M_1C = 6$

Пусть мы будем искать E, F, K





Пусть $\angle FOA = 6k$, где $4 \geq k \geq 1$. Тогда точки E; F; K это точки, что 3 подряд идущие из точек A, B_1, D_1, L_1, M_1, C

Итак, $\angle FOA = 6k$; $OE = OF = OK$, ибо O – центр окружности, $\angle FOE = 6$; $\angle OEF = \frac{180-6}{2} = 87$

$\angle KOF = 6$; $\angle OFK = \frac{180-6}{2} = 87$

$\angle KFF_1 = \angle OFK - \angle F_1FO = 87 - 6k > 0$

$\angle F_1FE = 87+6k$.

Отразим точку E относительно FF FF_1, получим E'. Аналогично показать, что $F_1E_1' > F_1K_1 \iff \angle E_1'E'F > \angle KE'F$

$$\angle E_1'E'F = \angle E_1EF = 180-(87+6k) = 93-6k.$$

$$\angle KFE' = \angle E_1FE' - \angle KFE' = \cancel{\ldots}\ 87+6k-(87-6k) = 12k < 90$$

$$\angle KE'F = \frac{180-12k}{2} = 90-6k$$

$\Leftarrow$

$$\angle E_1'EF = 93-6k > \cancel{90-6k}\ \angle KE'F = 90-6k$$

Что и требовалось доказать

№2 Предположим противное, пусть нашлись такие числа $k; k+1; \ldots k+21; k \in N$

Тогда какое-то из чисел $k+11$ или $k+10$ нечетное. Пусть $k+10$ - нечетное, тогда сумма цифр числа $k+10$ - нечетная, иначе $k+10$ не делилось на свою сумму цифр. Посмотрим на предпоследнюю цифру t числа $k+10$. Если ~~эта циф~~ $t < 9$, то посмотрим на число $k+20$, оно тоже нечетное и должно делиться на свою сумму цифр. Но сумма цифр числа $k+20$ на 1 больше суммы цифр числа $k+10$, т.к. $t < 9 \Rightarrow$ при прибавлении 10 к числу $k+10$ мы изменим только предпоследнюю цифру числа $k+10$, а именно увеличим её на 1. Раз сумма цифр увеличилась на 1 значит сумма цифр числа $k+20$ на 1 больше суммы цифр

числа $k+10$ (т.к. оно четное.
При этом число $k+20$ нечетное) $\Rightarrow k+20$
не может делиться на свою сумму цифр,
противоречие. Случай $k \geq 0$ аналогичен,
рассмотрим числа ~~k получим~~ и
$k+10$ и k и получим ~~такое же~~ аналогичное противоречие. Случай ~~когда~~ k, при котором
$k+11$ нечетное разбирается аналогично,
рассматриваем числа $k+1$, $k+21$, для которых тоже должно выполняться условие.

№3 При $k = 6$

Подставим $x = 1$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = -\frac{1}{2}$:

$$k(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8})^2 \le (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})^3$$

$$k \cdot (\frac{6}{8})^2 \le (\frac{6}{4})^3$$

$$\frac{k \cdot 6^2}{\cancel{64}} \le \frac{6^3}{\cancel{64}}$$

$$k \cdot 6^2 \le 6^3$$

$$k \le 6$$

Т.е. $k > 6$ не подходит; докажем, что ~~k =~~ при $k = 6$ неравенство выполняется при любых $x; y; z \in \mathbb{R}$, таких что $x + y + z = 0$

~~Не умаляя общ~~

Без ограничения общности, $x \ge y \ge z$

Заметим, что неравенство однородно:

$$k((x \cdot t)^3 + (yt)^3 + (zt)^3)^2 \le ((xt)^2 + (yt)^2 + (zt)^2)^3$$

$$k(t^3(x^3 + y^3 + z^3))^2 \le (t^2(x^2 + y^2 + z^2))^3$$

$$t^6 \cdot k(x^3 + y^3 + z^3)^2 \le t^6(x^2 + y^2 + z^2)^3$$

То есть $x; y; z$ мы можем домножать на $t \ne 0$.

Пусть $x = 0$, тогда $y = 0$; $z = 0$ и $x \ge y \ge z$, и $x + y + z = 0$. Тогда неравенство выполнено для всех k. Теперь можно считать, что $x \ne 0$. Тогда $x > 0$, иначе $x + y + z < 0$.

Умножим каждую переменную на $\frac{1}{x}$ и докажем для них неравенство. Если мы докажем для них неравенство, то мы решим задачу.

Теперь у нас $x = 1$; y; z и $x + y + z = 0$:

$$k(1 + y^3 + z^3)^2 \le (1 + y^2 + z^2)^3$$

$x + y + z = 0$; т.е. $1 + y + z = 0$ и

$y + z = -1$

Перепишем нер-во в виде:

$k(1+(y+z)(y^2-yz+z^2))^2 \le (1+y^2+z^2)^3$

$k(1-(y^2-yz+z^2))^2 \le (1+(y+z)^2-2yz)^3$

$k(1-(y^2+z^2)-yz)^2 \le (1+1-2yz)^3$

$k(1-(y+z)^2-3yz)^2 \le (2-2yz)^3$

$k(-3yz)^2 \le (2(1-yz))^3$

$k\cdot(3yz)^2 \le 8(1-yz)^3$

Заметим, что изначально мы сказали, что $x \ge y \ge z$. Так как мы домножили переменные на отрицательное число, неравенство для новых переменных также выполняется (тогда $1 \ge y \ge z$ и $y+z=-1$.) (1)

Раскроем скобки в неравенстве:

$k(3yz)^2 \le 8(1+3(yz)^2-3yz-(yz)^3)$

$k\cdot(3yz)^2 \le 8-24yz+24(yz)^2-8(yz)^3$

Подставим $k=6$:

$6(3yz)^2 \le 8-24yz+24(yz)^2-8(yz)^3$

$54(yz)^2 \le 8-24yz+24(yz)^2-8(yz)^3$

$8 \ge 8(yz)^3+30(yz)^2+24yz \quad |:2$

$4 \ge 4(yz)^3+15(yz)^2+12yz$

Найдем максимальное значение правой части. При $yz \ge 0$ она достигается при максимальном значении yz.

При $yz \le 0$ нер-во выполняется

~~Из (1) получаем~~, Заметим, что тогда y,z одного знака. Тогда они оба отрицательны, т.к. $y+z=-1$. Заметим, что

$4yz \le (y+z)^2$, $yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{1}{4}$

При $yz = \frac{1}{4}$ достигается равенство.

$4 \ge 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 15\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 12\cdot\frac{1}{4} =$

$= \frac{1}{16} + \frac{15}{16} + \frac{12}{4} = \frac{16}{16} + \frac{12}{4} = 1+3 = 4$

Теперь пусть $yz < 0$

Тогда из (1) $-\frac{1}{2} \leq y \leq 1 = x$ и

$-2 \leq z \leq -\frac{1}{2}$

Тогда минимальное значение $yz = -2$.

Значит нам достаточно проверить неравенство на отрезке $yz = t$ $[-2; 0]$

$$4 \geq yz(4(yz)^2 + 15yz + 12)$$

Находим корни уравнения:

$4(yz)^3 + 15(yz)^2 + 12yz - 4 = 0$

$yz = t$

$4t^3 + 15t^2 + 12t - 4 =$

$= (t - \frac{1}{4})(4t^2 + 16t + 16) =$

$= (t - \frac{1}{4})(2t + 4)^2 = 4(t - \frac{1}{4})(t + 2)^2 = 0$

Значит, корни $yz = \frac{1}{4}$ и $yz = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на отрезке $[-2; 0]$ многочлен $4t^3 + 15t^2 + 12t - 4$ неположителен

⑦

№5 (Докажем, что $A = (\sqrt{3}+1)^{2023} - (\sqrt{3}-1)^{2023} \in \mathbb{Z}$

Действительно, при раскрытии скобок $(\sqrt{3}+1)^{2023}$ иррациональные слагаемые получаются только в случае, когда $\sqrt{3}$ выбирается нечетное число раз, и иррациональное слагаемое будет $\cancel{C_{2023}^{2k+1}(\sqrt{3})^{2k+1}}$ $C_{2023}^{2k+1}\cdot(\sqrt{3})^{2k+1}$ при $0 \le k \le 1011$. Во второй скобке иррациональное слагаемое будет $C_{2023}^{2k+1}\cdot(\sqrt{3})^{2k+1}\cdot(-1)^{2023-(2k+1)} =$

$$= C_{2023}^{2k+1}\cdot(\sqrt{3})^{2k+1} \quad \text{при } 0 \le k \le 1011.$$

~~Т.е. в выражении A сократились все иррацио-~~

Стало быть, $A =$

$$= \sum_{k=0}^{1011} C_{2023}^{2k} 3^{k} + \sum_{k=0}^{1011} C_{2023}^{2k+1}\cdot 3^{k}\cdot\sqrt{3} - \left(-\sum_{k=0}^{1011} C_{2023}^{2k} 3^{k} + \sum_{k=0}^{1011} C_{2023}^{2k+1}\cdot 3^{k}\cdot\sqrt{3}\right) = 2\cdot\sum_{k=0}^{1011} C_{2023}^{2k}\cdot 3^{k} \in \mathbb{Z})$$

При этом заметим, что $0 < \sqrt{3}-1 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<(\sqrt{3}-1)^{2023}<1$. Стало быть, из числа $(\sqrt{3}+1)^{2023}$ мы вычли положительное число, меньшее 1 и получили целое число $\Rightarrow$ мы получим целую часть числа.

~~Итак~~ Итак, $A=\overbrace{((\sqrt{3}+1)^{2023}-(\sqrt{3}-1)^{2023})}^{\in \mathbb{Z}} = [(\sqrt{3}+1)^{2023}]$.

Заметим $(\sqrt{3}+1)^2 = 1+3+2\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3} = 2(2+\sqrt{3})$

$(\sqrt{3}-1)^2 = 1+3-2\sqrt{3} = 4-2\sqrt{3} = 2(2-\sqrt{3})$.

Пусть $C=(\sqrt{3}+1)^{2023}$; $D=(\sqrt{3}-1)^{2023}$.

Тогда $A=C-D$

$C=(2(2+\sqrt{3}))^{1011}(\sqrt{3}+1)$;

$D=(2(2-\sqrt{3}))^{1011}(\sqrt{3}-1)$

$A=C-D=2^{1011}((2+\sqrt{3})^{1011}(\sqrt{3}+1)-(2-\sqrt{3})^{1011}\cdot(\sqrt{3}-1))$

Обозначим $(2+\sqrt{3})^{1011}=a+b\sqrt{3}$, где $a,b\in\mathbb{Z}$. Тогда $(2-\sqrt{3})^{1011}=a-b\sqrt{3}$. Док-во этого факта аналогично док-ву утверждения ①, ибо иррациональные части обеих скобок равны по модулю $\sum_{k=0}^{505} C_{1011}^{2k+1}\cdot(\sqrt{3})^{2k+1}\cdot 2^{1010-2k}$. В первой скобке это выражение берётся со знаком $+$, во второй скобке берётся со знаком $-$, а сумма оставшихся слагаемых в обеих скобках равна

$\sum_{k=0}^{505} C_{1011}^{2k}\cdot 3^k\cdot 2^{1011-2k}\in\mathbb{Z}$.

При этом заметим, что $a \vdots 2$, т.к. $C_{1011}^{2t}\cdot 3^t\cdot 2^{1011-2t} \vdots 2$ при всех $0\le t\le 505$, а $b \not\vdots 2$, т.к. $C_{1011}^{2t+1}(\sqrt{3})^{2t}\cdot 2^{1010-2t} \vdots 2$ при $0\le t\le 504$, а при $t=505$ $C_{1011}^{2t+1}\cdot(\sqrt{3})^{2t}\cdot 2^{1010-2t} = C_{1011}^{1011}\cdot 3^t = 3^t = 3^{505} \not\vdots 2$.

$\Rightarrow 0<(\sqrt{3}-1)^{2023}<1$. Следовательно, из числа $(\sqrt{3}+1)^{2023}$ мы вычли положительное число, меньшее 1, и получили целое число $\Rightarrow$ мы получили целую часть исходного числа.

~~Итак~~ Итак, $A = [(\sqrt{3}+1)^{2023} - \underbrace{(\sqrt{3}-1)^{2023}]}_{}$ $\in \mathbb{Z}$ $=$

$= [(\sqrt{3}+1)^{2023}]$.

Рассмотрим $(\sqrt{3}+1)^2 = 1+3+2\sqrt{3} = 4+2\sqrt{3} =$

$= 2(2+\sqrt{3})$

$(\sqrt{3}-1)^2 = 1+3-2\sqrt{3} = 4-2\sqrt{3} = 2(2-\sqrt{3})$.

Пусть $C = (\sqrt{3}+1)^{2023}$; $D = (\sqrt{3}-1)^{2023}$.

Тогда $A = C - D$

$C = (2(2+\sqrt{3}))^{1011}(\sqrt{3}+1)$;

$D = (2(2-\sqrt{3}))^{1011}(\sqrt{3}-1)$

$A = C - D = 2^{1011}((2+\sqrt{3})^{1011}(\sqrt{3}+1) - (2-\sqrt{3})^{1011}\cdot(\sqrt{3}-1))$

Обозначим $(2+\sqrt{3})^{1011} = a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда $(2-\sqrt{3})^{1011} = a - b\sqrt{3}$. Док-во этого факта аналогично док-ву утверждения ①, т.к. иррациональные части обеих скобок равны по модулю $\sum_{k=0}^{505} C_{1011}^{2k+1}\cdot(\sqrt{3})^{2k+1}\cdot 2^{1010-2k}$. В первой скобке эти выражения берутся со знаком $+$, во второй скобке берутся со знаком $-$, а сумма оставшихся слагаемых в обеих скобках равна

$$\sum_{k=0}^{505} C_{1011}^{2k}\cdot 3^k\cdot 2^{1011-2k} \in \mathbb{Z}.$$

При этом заметим, что $a \vdots 2$, т.к. $C_{1011}^{2t}\cdot 3^t\cdot 2^{1011-2t} \vdots 2$

при всех $0 \le t \le 505$, а $b \not\vdots 2$, т.к. $C_{1011}^{2t+1}(\sqrt{3})^{2t}\cdot 2^{1010-2t} \vdots 2$ при $0 \le t \le 504$, а при $t = 505$ $C_{1011}^{2t+1}\cdot(\sqrt{3})^{2t}\cdot 2^{1010-2t} = C_{1011}^{1011}\cdot 3^t = 3^t = 3^{505} \not\vdots 2$.

Тогда $A = C - D = 2^{1011}((2+\sqrt{3})^{1011}(\sqrt{3}+1) -$

$- (2-\sqrt{3})^{1011}(\sqrt{3}-1)) = \cancel{2}$

$= 2^{1011}(\cancel{a+b\sqrt{3}} (a+b\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) -$

$- (a-b\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)) =$

$= 2^{1011}(a\sqrt{3} + 3b + a + b\sqrt{3} - (a\sqrt{3} - \cancel{b\sqrt{3}}\, 3b -$

$- a + b\sqrt{3}) =$

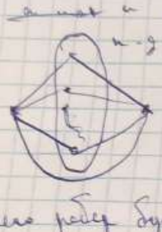
$= 2^{1011}(6b + 2a) = 2^{1012}(3b+a)$

$\cancel{3b \dots 3}$ $3b+a \not\vdots\, 2$, т.к. $a \vdots 2$ и $b \not\vdots\, 2$.

Стало быть, $A \vdots 2^{1012}$, $\not\vdots\, 2^{1013}$.

№6 Ответ: $2n-3$

Пример: возьмём 2 вершины и соединим их со всеми оставшимися $n-2$ ~~вершинами~~ и проведём ребро между ними



Всего рёбер будет $= 2(n-2)+1 = 2n-3$.

Пример подходит, т.к. любой цикл в этом графе содержит ≥ 3 вершины $\Rightarrow$ любой цикл содержит хотя бы 1 из тех $n-2$ вершин, степень каждой из которых равна 2. ~~Тогда если мы удалим этот цикл~~ Обозначим какую-то вершину A. Тогда если мы удалим какой-то цикл, то мы удалим все рёбра из A. ~~Сл~~

~~Сл~~ Стало быть, граф станет несвязным.

Оценка:

Предположим, что рёбер $\geq 2n-2$ и условие для графа выполнено. Заметим, что изначально граф связный, поэтому пока в нём есть цикл, то мы можем удалить любое ребро из этого цикла так, чтобы граф и [illegible] связным. Тогда пока в графе $\geq n$ рёбер и он на каждом шаге остаётся связным, то в нём можно найти цикл. Стало быть, мы можем удалить из графа $\geq n-1$ ребро так, чтобы он остался связным. Мы хотим удалить определённые $n-1$ ребро так, чтобы ~~граф~~ граф остался связным и при этом никакие из ~~4~~ этих рёбер образовывали цикл. Тогда мы получим противоречие.

Выделим какую-нибудь вершину X. Тогда

значит, что из нее выходит $\le n-1$ ребро. Тогда мы хотим удалить ребра, ~~ни в~~ ни одно из которых не выходит из вершины X. Итак, изначально у нас $k \ge 2n-2$ ребра. Выделим какой-то цикл, содержащий ≥ 3 вершины. Если какая-то из них X, то выберем из оставшихся в цикле 2 ~~соседних~~ соседние вершины и удалим между ними ребро. При этом граф не ~~потер~~ потеряет связность, так как мы удалили 1 ребро s из цикла; т.е. если между какими-то 2 вершинами был путь, проходящий по ребру s, то между ними останется путь, который проходит по оставшимся ребрам цикла:

Мы научились удалять ребра s так, чтобы граф оставался связным, при этом s не выходило из X. Сделаем так $n-1$ раз. Тогда все удаленные $n-1$ ребро ~~идут~~ внутри множества B из $n-1$ вершины

Утверждается, что среди них найдутся ..., образующие цикл. Пусть после удаления ребер мн-во B распалось на t компонент связности, в ~~каждой~~ которых $a_1, a_2, \dots, a_t$ вершин соответственно. $\sum_{i=1}^{t} a_i = n-1$. Тогда в ~~каждой~~

~~i-й компоненте не более $a_i - 1$ ребра,~~

~~i-ой~~

i компоненте $\le a_i - 1$ удаленного

5 Утверждается, что среди них найдутся несколько, образующие цикл. Выделим вершины множества B только на ребра, которые мы удалили. ~~Тогда~~ пусть B распалось на t компонент связности, $t \geq 1$, ~~пусть~~ в ~~которой~~ из которых $a_1, a_2, \dots, a_t$ вершин соответственно. $\sum\limits_{i=1}^{t} a_i = n-1$. Тогда в ~~каждой~~ i компоненте $\leq a_i - 1$ ребер, иначе мы найдем цикл из удаленных ребер. Тогда всего удаленных ребер $\leq$

$$\leq (a_1-1)+(a_2-1)+\dots+(a_t-1) = \sum_{i=1}^{t} a_i - t = n-1-t < n-1$$

Но с другой стороны, мы получили, что удаленных ребер в B $= n-1$. Противоречие. Значит, вершины B найдутся цикл из удаленных ребер $\Rightarrow$ противоречие, и ребер $\leq 2n-3$

$f(M) = (-S_{MBA} + S_{MAD}) - S_{MDC} + S_{MCB} =$

$= 0 + 0 = 0$, т.к. $S_{MAD} = S_{MAB}$; $S_{MCD} = S_{MCB}$

$f(N) = (-S_{NAB} + S_{NBC}) - S_{NDC} + S_{NDA} =$

$= 0$ аналогично

$f(K) = (-S_{KAD} + S_{KDC}) + S_{KCB} - S_{KBA} =$

$(S_{KAD} = S_{KAQ} - S_{KDQ} = S_{KAP} - S_{KDQ}$

$S_{KCD} = S_{KCP} - S_{KPD} =$

$= S_{KCQ} - S_{KPD}$

$S_{KCB} = S_{KBQ} - S_{KCQ}$

$S_{KBA} = S_{KBP} - S_{KAP}) \Rightarrow$

$f(K) = -S_{KAD} + S_{KDC} + S_{KCB} - S_{KBA} =$

$= -S_{KAP} + S_{KDQ} + S_{KCQ} - S_{KPD} +$

$+ S_{KBQ} - S_{KCQ} - S_{KBP} + S_{KAP} =$

$= S_{KDQ} + S_{KBQ} - S_{KPD} - S_{KBP} =$

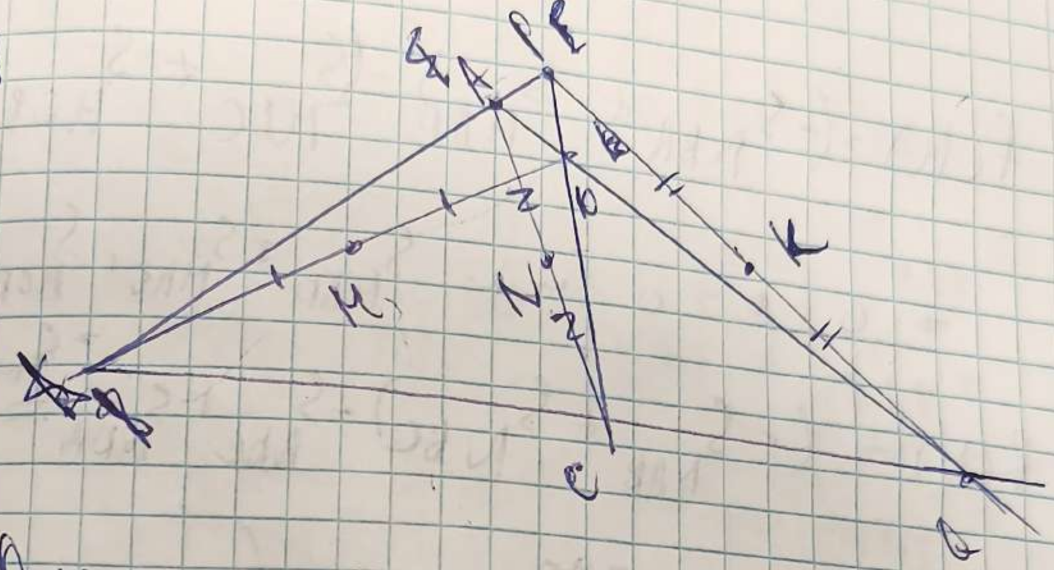
$= 0$, ибо $S_{KDQ} = S_{KPD}$; $S_{KBQ} = S_{KBP}$

Мы получили, что $f(M) = 0$, $f(N) = 0$, $f(K) = 0$. Осталось проверить, что $f(Y) \neq 0$ для какой-то точки Y, тогда из этого будет следовать, что ГМТ $f(X) = 0$ это прямая, а значит, точки M, N, K лежат на одной прямой.

Возьмем $f(A)$. Если $f(A) \neq 0$, то мы победили, пусть $f(A) = 0 \Rightarrow -S_{ADC} + S_{ABC} = f(A) = 0$.

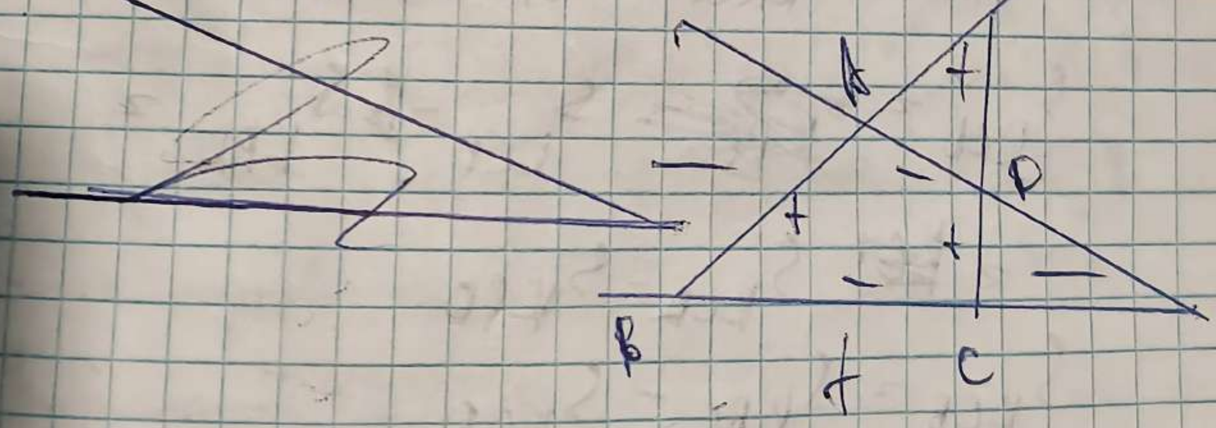
$S_{ABC} = S_{ADC}$

№4



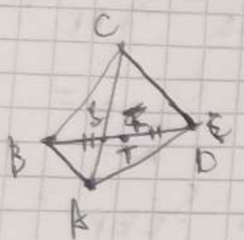
Определим

~~Введём~~ на плоскости некоторую функцию $f(X)$ от точки X, которая равна сумме ориентированных площадей S_{XAD}; S_{XDC}; S_{XCB}; S_{XAB}. Введём ориентированное расстояние до прямых AD; DC; CB; BA.



Посчитаем $f(M)$; $f(N)$; $f(K)$.

Пусть AC не проходит через середину BD



Тогда $S = AC \cap BD$, без ограничения общности $BS < SD \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BSC} < S_{SDC}$ и $S_{ABS} < S_{ASD}$

Тогда $S_{ABC} = S_{BSC} + S_{ABC} <$

$< S_{ACD} = S_{SDC} + S_{ASD}$

Противоречие, $\Rightarrow$ AC проходит через середину BD

Из $f(B) = 0$ аналогично следует, что BD проходит через середину AC.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ABCD - параллелограмм. Это противоречит условию непараллельности сторон

Сначала знаем, $f(A) \neq 0$ или $f(B) \neq 0$, а значит, задача решена