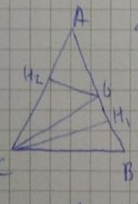
Задача №1

$\sin\frac{\pi}{30} = \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{5} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

Рассчитаем $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$

Д $\triangle$ с углами 72°, 72° и 36°



$\triangle ABC$ – этот треугольник

$\angle C = \angle B = 72^\circ$, $\angle A = 36^\circ$

CL – бис $\angle ACB$

$\triangle ACL$ – р/б т.к. $\angle CAL = \angle LCA = 36^\circ$

$\triangle ALB$ – р/б т.к. $\angle CLB = \angle CBL = 72^\circ$

$\Rightarrow$ $AL = LC = CB$. Пусть $a = AL = LC = CB$

$AH_2 = a\cdot\cos 36^\circ \Rightarrow AC = 2a\cos 36^\circ$ (т.к. LH_2 – выс, а высота в р/б является мед.)

Тогда $LB = AB - AL = 2a\cos 36^\circ - a$. H_1 – середина LB (т.к. CH_1 – высота, а высота в р/б является мед)

$\Rightarrow BH_1 = a\cos 36^\circ - \frac{a}{2}$

$\sin\angle H_1CB = \frac{H_1B}{BC} \Rightarrow \sin H_1CB = \frac{a\cos 36^\circ - \frac{a}{2}}{a} =$

$= \cos 36^\circ - \frac{1}{2}$

$\angle H_1CB = 18^\circ$ т.к. CH_1 бис по св-ву р/б.

$\sin 18^\circ = \cos 36^\circ - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 18^\circ + \sin 18^\circ - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \sin 18 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Т.к. $\sin 18^\circ > 0$ (т.к. $0^\circ < 18^\circ < 180^\circ$), $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

По ОТТ $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$ ($0^\circ < 18^\circ < 90^\circ \Rightarrow$ х орош)

$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

$\sin 36^\circ = 2\cos 18^\circ \cdot \sin 18^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20-4\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

~~Тогда $\sin\frac{\pi}{30} = \sqrt{\ }$~~

$\cos 36^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 36^\circ}$ ($\cancel{\cos}$ $0^\circ < 36^\circ < 90^\circ$)

$\cos 36^\circ = \sqrt{1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} =$

$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Тогда $\sin\frac{\pi}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} =$

$= \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - 1 + \sqrt{5}}{8}$

Докажем, что это больше 0,1

$\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - 1 + \sqrt{5}}{8} > 0,1 \Leftrightarrow \sqrt{30-6\sqrt{5}} > 1,8 - \sqrt{5}$ - верно

т.к. $\sqrt{5} > 2$ $(5>4 \Leftrightarrow \sqrt{5}>2)$, а значит $1,8-\sqrt{5}<0$,

а $\sqrt{30-6\sqrt{5}} \geq 0$ (т.к. корень всегда ≥ 0 и $30 > 6\sqrt{5}$ $(900 > 180)$) а значит $\sin\frac{\pi}{30} > 0,1$

ч.т.д.

Задача 5?

Допустим существует 22 хардшад идущих подряд

По принципу Дирихле существует минимум 2 числа $\vdots$ на 10 из 22 подряд идущих чисел. Рассмотрим 2 случая:

1) 2 числа, которые делятся на 10, отличаются на 10 и при этом нет перехода на следующий разряд (эти 2 числа не оканчиваются на 00 и 90).

$\exists$ наименьшее число из этой пары равно a. тогда второе число равно $a+10$

Рассмотрим 2 случая:

1) число $a+11$ является харшадом. тогда $\exists$ сумма цифр числа a равна b. тогда сумма цифр числа $a+1$ равна $b+1$, сумма цифр числа $a+2$ равна $b+2$, сумма цифр числа $a+10$ равна $b+1$, сумма цифр числа $a+11$ равна $b+2$.

выпишем:

$$\left.\begin{aligned} a+1 &\vdots b+1 \\ a+10 &\vdots b+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 9 \vdots b+1$$

$$\left.\begin{aligned} a+2 &\vdots b+2 \\ a+11 &\vdots b+2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 9 \vdots b+2$$

Делители числа 9:

1, 3, 9. Никакие 2 из них не отличаются на 1 $\Rightarrow \nexists\, b \in \mathbb{N}: 9 \vdots b+1$ и $9 \vdots b+2$?!

2) число $a+11$ не является харшадом. Тогда т.к. числа a и $a+10$ являются харшадами, то и число $a-10$ тоже является харшадом (т.к. чисел 22). тогда $\exists$ число $c = a-10$. число $c+11$ является харшадом. возвращаемся к предыдущему случаю и доказываем для c.

2) 2 числа, которые делятся на 10, отличаются на 10 и при этом есть переход через разряд (эти 2 числа оканчиваются на 90 и 00)

$\exists$ то число, которое оканчивается на 90 равно a. тогда число, которое оканчивается на 00 равно $a+10$.

Рассмотрим 2 случая:

1) число $a-1$ является харшадом. тогда $\exists$ сумма цифр числа a равна b. тогда сумма цифр числа $a-1$ равна $b+8$ (оканчивается на 89, при этом на разрядах выше ничего не поменялось), сумма цифр числа $a+8$ равна $b+8$ (оканчивается на 98).

$$\left.\begin{aligned} a-1 &\vdots b+8 \\ a+8 &\vdots b+8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 9 \vdots b+8$$

Делители числа 9: 1; 3; 9 $\Rightarrow$ единственное подходящее b — это 1 $\Rightarrow b=1$.

Но сумма цифр числа a хотя бы 9 т.к. число a оканчивается на 90 ?!

2) число $a-1$ не является харшадом. Тогда число $a+20$ является харшадом (так как у нас 22 харшада идут подряд). $\exists$ $c = a+10$. число $c+11$ является харшадом. возвращаемся к случаю 1.1 (самый первый) и доказываем для c.

Задача №3

1 случай

∃ среди чисел x, y, z нет нулей т.е. все числа ненулевые.

По принципу Дирихле хотя бы 2 числа одного знака. Не умоляя общности это числа x и y.

$x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-x-y$

Подставим

$$k(x^3+y^3+(-x-y)^3)^2 \le (x^2+y^2+(-x-y)^2)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \le \frac{8(x^2+y^2+xy)^3}{(-3y^2x-3yx^2)^2} \Leftrightarrow k \le \frac{8}{9}\frac{(x^2+y^2+xy)^3}{x^2y^2(y+x)^2} \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{x}{y}-\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x}+3=$$

$$=\frac{(x+y)^2(x^6+3x^5y+6x^4y^2+7x^3y^3+6x^2y^4+3xy^5+y^6)}{(x+y)^2}=$$

$$=x^6+3x^5y+6x^4y^2+7x^3y^3+6x^2y^4+3xy^5+y^6$$

И $(x^2+xy+y^2)^3=x^6+3x^5y+6x^4y^2+7x^3y^3+6x^2y^4+3xy^5+y^6$

Таким образом $\frac{(x^2+xy+y^2)^3}{y^2x^2(x+y)^2}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{x}{y}-\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x}+3 \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}}+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\frac{x^2}{(x+y)^2}-\frac{x}{x+y}+3 \ge$

$$\ge 7+\frac{x^2}{(x+y)^2}-\frac{x}{x+y} \underset{s=\frac{x}{x+y}}{=} 7+s^2-s \ge 6\tfrac{3}{4} \text{ т.к.}$$

min зн принимаемое кв. функцией — это вершина, а значение $7+s^2-s$ в вершине равно $6\frac{3}{4}$

Также из (1) $\frac{(x^2+y^2+xy)^3}{x^2y^2(x+y)^2} \ge \frac{9}{8}k$

тогда получаем, что $\frac{9}{8}k$ не больше $6\frac{3}{4}$

$\frac{9}{8}k \le 6\frac{3}{4} \Rightarrow$ максимальное k — это 6 (при равенстве)

Таким образом я доказал, что $k \le 6$ и привел пример.

Пусть одно из чисел равно нулю (второй случай). Не умоляя общности $x=0$

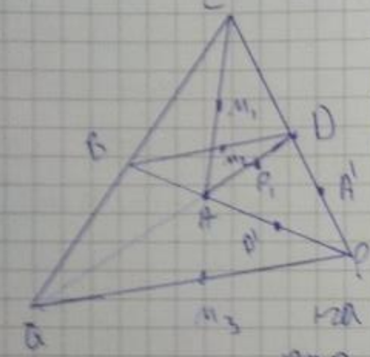
$$\begin{cases} k(y^3+z^3)^2 \le (y^2+z^2)^3 \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 8y^2 \\ z=-y \end{cases}$$ — истина для любых z и y

Т. обр ничего не противоречит если $k=6$ (во втором случае подходят любые k)

Значит ответ 6

Ответ: 6

Задача 5



M_1, M_2, M_3 – середины AC, BD и PQ соотв.

A' – середина DP

P' – середина AD, D' – середина AP

1) P', M_1, D' – лежат на одной прямой – средней линии $\triangle PAD$

Аналогично M_2, P', A' лежат на одной средней линии, а точки D', M_3, A' – лежат на одной средней линии $\triangle QDB$

Применим теорему Менелая для $\triangle APD$ и прямой BQ:

$$\frac{PB}{BA} \cdot \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{DC}{CP} = 1$$

$$\frac{PB}{BA} = \frac{A'M_2}{M_2P'}$$

$$\frac{DC}{CP} = \frac{P'M_1}{M_1D'}$$

$$\frac{AQ}{QD} = \frac{D'M_3}{M_3A'}$$

$$\Rightarrow \frac{A'M_2}{M_2P'} \cdot \frac{P'M_1}{M_1D'} \cdot \frac{P'M_3}{M_3A'} = \frac{PB}{BA} \cdot \frac{DC}{CP} \cdot \frac{AQ}{QD} = 1 \quad (1)$$

(1) $\Rightarrow$ по обратной теореме Менелая для $\triangle A'D'P'$ точки M_1, M_2 и M_3 лежат на одной прямой

Задача №5

Докажем, что $\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \{(1+\sqrt{3})^{2n+1}\} = (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$.

$(1+\sqrt{3})^{2n+1} = \{(1+\sqrt{3})^{2n+1}\} + [(1+\sqrt{3})^{2n+1}] \Leftrightarrow (1+\sqrt{3})^{2n+1} - \{(1+\sqrt{3})^{2n+1}\} = [(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$

Заметим, что т.к. $2>\sqrt{3}>1$, $(\sqrt{3}-1)^n<1$ для любого натурального n. Тогда $(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ отличается от $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ меньше чем на 1. Таким образом если $(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ является целым, то это точно равно $[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$.

(!) $\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \{(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}\} = 0$

$(1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1} \underset{\text{бином}}{=}$

$= (C_{2n+1}^{2n+1} + \sqrt{3}C_{2n+1}^{2n} + 3C_{2n+1}^{2n-1} + \ldots + 3^n\cdot\sqrt{3}\cdot C_{2n+1}^{0}) -$

$-(C_{2n+1}^{0}\cdot 3^n\cdot\sqrt{3} - C_{2n+1}^{1}\cdot 3^n + C_{2n+1}^{2}\cdot 3^{n-1}\cdot\sqrt{3} - \ldots + C_{2n+1}^{2n}\cdot\sqrt{3} - C_{2n+1}^{2n+1}) =$

$= C_{2n+1}(3^n\cdot\sqrt{3} - 3^n\cdot\sqrt{3}) + C_{2n+1}^{1}(3^n+3^n) + C_{2n+1}^{2}(3^{n-1}\cdot\sqrt{3} - 3^{n-1}\cdot\sqrt{3})$

$+ \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}(1+1) = 2C_{2n+1}^{1}\cdot 3^n + 2C_{2n+1}^{3}\cdot 3^{n-1} + 2C_{2n+1}^{5}\cdot 3^{n-2}$

$+ \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

Получившееся число целое, как сумма целых ч.т.д.

Я доказал, что $[(1+\sqrt{3})^{2n+1}] = (1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

Докажем с помощью ММИ, что $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1} \vdots 2^{n+1}$ & $\not\vdots\, 2^{n+2}$

База: для $n=0$ и $n=1$ выполняется

$(\sqrt{3}+1)^1 - (\sqrt{3}-1)^1 = 2 \vdots 2$ & $2 \backslash 4$

$(\sqrt{3}+1)^3 - (\sqrt{3}-1)^3 = 3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}+1 = 20$

$20 \vdots 4$ & $20 \backslash 8$

Индукционное предположение:

Я для $n=k$ и $n=k-1$ это верно

Индукционный переход

(!) для $k+1$

$8((\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1})\cdot((\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2) \overset{(!)}{=}$

$= (\sqrt{3}+1)^{2k+3} - (\sqrt{3}-1)^{2k+3} + (\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}+1)^{2k-1} -$

$-(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}+1)^{2k-1} = (\sqrt{3}+1)^{2k+3} - (\sqrt{3}+1)^{2k+3} +$

$+ 4((\sqrt{3}+1)^{2k-1} - (\sqrt{3}-1)^{2k-1})$

Изначальное выражение (1) равно $8((\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1})$

т.е. по ИП оно делится на 2^{k+4} и $\backslash 2^{k+5}$.

$4((\sqrt{3}+1)^{2k-1} - (\sqrt{3}-1)^{2k-1})$ делится на 2^{k+2} и не дел. на 2^{k+3}

таким образом $(\sqrt{3}+1)^{2k+3} - (\sqrt{3}-1)^{2k+3} \vdots 2^{k+2}$ и $\backslash 2^{k+3}$

Вывод: $\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} [(\sqrt{3}+1)^{2n+1}] \vdots 2^{n+1}$ & $\backslash 2^{n+2} \Rightarrow [(\sqrt{3}+1)^{2023}] \vdots 2^{1012} \backslash 2^{1013}$

Задача №3

~~[illegible]~~

Докажем, что если $n \neq 2^k, k \in \mathbb{N}$, то из попарных сумм чисел можно восстановить исходные

Пусть $X=\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ — множество исходных чисел, $Y=\{y_1, y_2 \dots y_{C_n^2}\}$ — множество попарных сумм

Тогда

$$\sum_{i=1}^{C_n^2} y_i^k = \sum_{1\le i<j\le n}(x_i+x_j)^k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\ne j}}^{n} (x_i+x_j)^k = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j}^{n}(x_i+x_j)^k - \sum_{i=1}^{n} (2x_i)^k\Big)$$

Раскроем биномы и приведём к подобным слагаемым

$$\sum_{i=1}^{C_n^2} y_i^k = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{k} C_k^i S_i S_{k-i} - 2^k S_k\Big) = \frac{1}{2}(2n-2^k) S_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} S_i S_{k-i}$$

S_m — это сумма чисел исходного множества в m степени

т.к. $2n-2^k$ не обращается в 0 т.к. $n \neq 2^k$, мы можем поочерёдно решить и для S_k для $\sum_{i=1}^{C_n^2} y_i^1, \sum_{i=1}^{C_n^2} y_i^2, \dots \sum_{i=1}^{C_n^2} y_i^n$. ~~Эти~~ ~~одного~~ суммы ~~однозначно~~ определяют $S_1, S_2 \dots S_n$, т.е. однозначно $x_1 \dots x_n$. ч.т.д.