№1

Посчитаем $\varphi(2024)$ по формуле:

$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$, где $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ – разл. n на прост. множители

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

$\varphi(2024) = 2024\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{23}\right) = 2024 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{22}{23} =$

$= 880$

По определению $\varphi(2024)$ – это кол-во чисел, взаимнопростых с 2024 и не превосходящих его. 2024 не взаимнопросто с самим собой, поэтому на промежутке $[1, 2023]$ таких чисел также 880.

Ответ: 880.

№2

Заметим, что любой квадрат мы можем единственным способом вписать в квадрат, стороны которого идут по линиям сетки. ⇒ если рассмотреть все квадраты со сторонами, идущими по линиям сетки, и для каждого из них посчитать все возможности вписать в него квадрат, то мы получим искомое число.

Если квадрат не совпадает с вписанным в него, то каждой стороне принадлежит по 1 вершине вписанного квадрата, причём эта вершина находится не в углу. Тогда для квадрата со стороной n существует $n-1$ таких квадратов, +1 квадрат, совпадающий с нашим. ⇒ всего их n. Далее

Заметим, что кол-во способов выбрать квадрат со стороной n, в котором стороны идут по линиям сетки равно кол-ву способов выбрать клетку, которая будет в нём левой нижней. Такой клеткой может быть любая за исключением верхних $n-1$ рядов и правых $n-1$ столбцов, т.к. иначе он просто не поместится. То есть таких способов

№2 (прод.)

$(9-(n-1))^2 = (10-n)^2$.

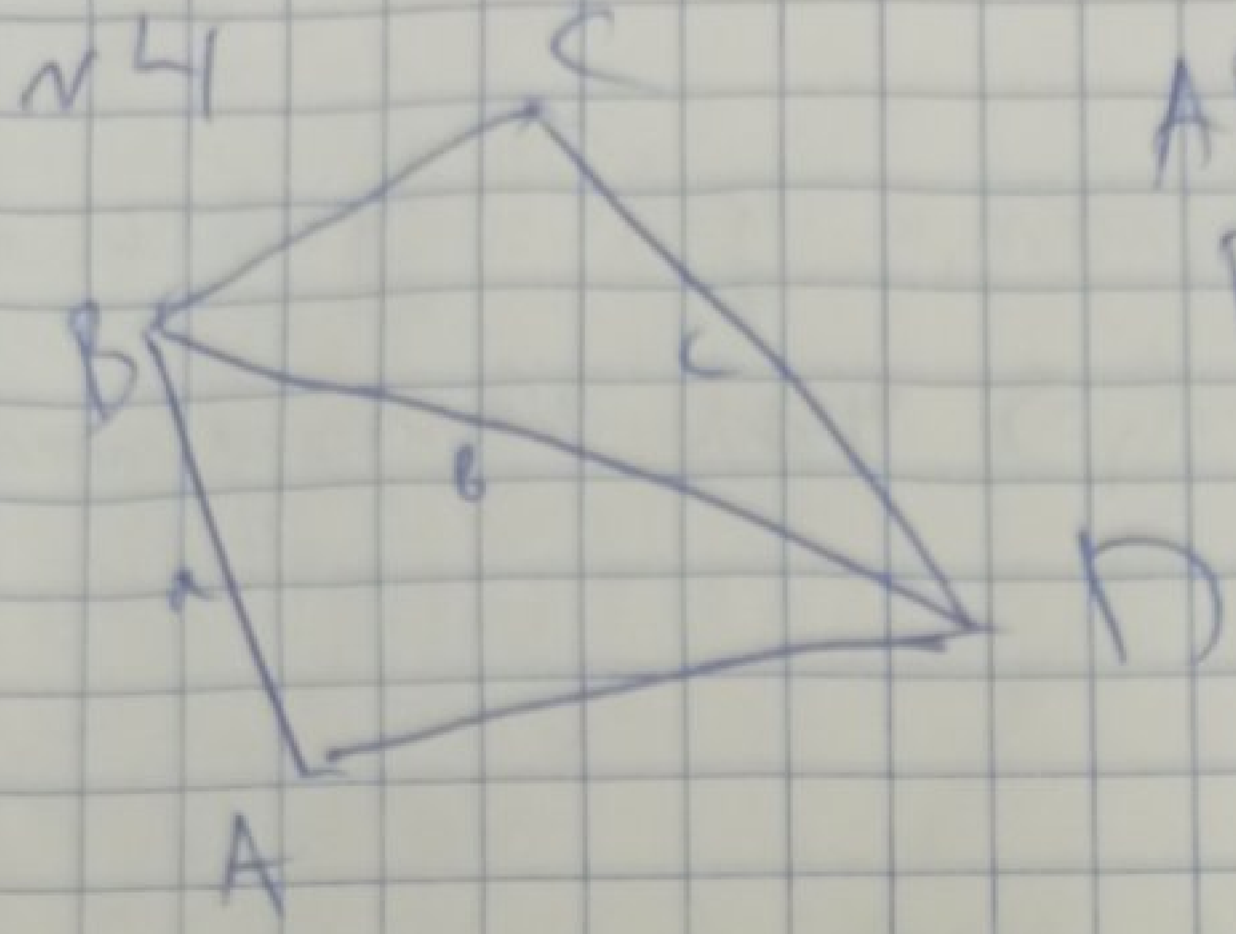
То есть нам нужно посчитать сумму всех $(10-n)^2 n$ для n от 1 до 9. Это:

$(10-1)^2 + (10-2)^2\cdot 2 + (10-3)^2\cdot 3 + (10-4)^2\cdot 4 + (10-5)^2\cdot 5 + (10-6)^2\cdot 6 +$
$+ (10-7)^2\cdot 7 + (10-8)^2\cdot 8 + (10-9)^2\cdot 9 = 81 + 128 + 147 + 144 + 125 +$
$+ 96 + 63 + 32 + 9 = 825$

Ответ: 825.

№3
Представим но это в виде графа, где вершинами будут последовательности цифр длины 4, а ориентированное ребро мы будем направлять из одной вершины в другую если в последовательности, выписываемой Таней эта вторая будет следовать за первой со сдвигом в одну цифру. Эта операция определяется однозначно, ⇒ из любой вершины выходит 1 ребро. Заметим, что обратная операция также однозначно определяется, т.к. для abcd такой будет xabc, где x – ост. от деления $x-a-b-c$ при делении на 10, ⇒ в каждую вершину входит ровно 1 ребро. Вершин всего 10^4, т.е. конечное кол-во, ⇒ по лемме о хороводах граф бьётся на циклы, т.к. у каждой вершины степень 2, при тём рёбра будут направлены в одну сторону, т.к. иначе найдётся вершина, из которой либо выходят 2 ребра, либо в неё приходит 2 ребра. ⇒ ~~Почти~~ для вершины 2023 идя по рёбрам, мы вернёмся обратно в неё, чтд. Ответ: да.

№41



$AB = a$ $\quad a+b+c \le 2$

$BD = b$ $\quad S_{ABCD} = \frac{1}{2}$

$DC = c$

Для треугольника со сторонами x и y и углом α между ними, его площадь равна $\frac{xy \cdot \sin\alpha}{2} \le \frac{xy}{2}$

$\Rightarrow S_{ABD} \le \frac{ab}{2}$

$S_{BCD} \le \frac{bc}{2}$

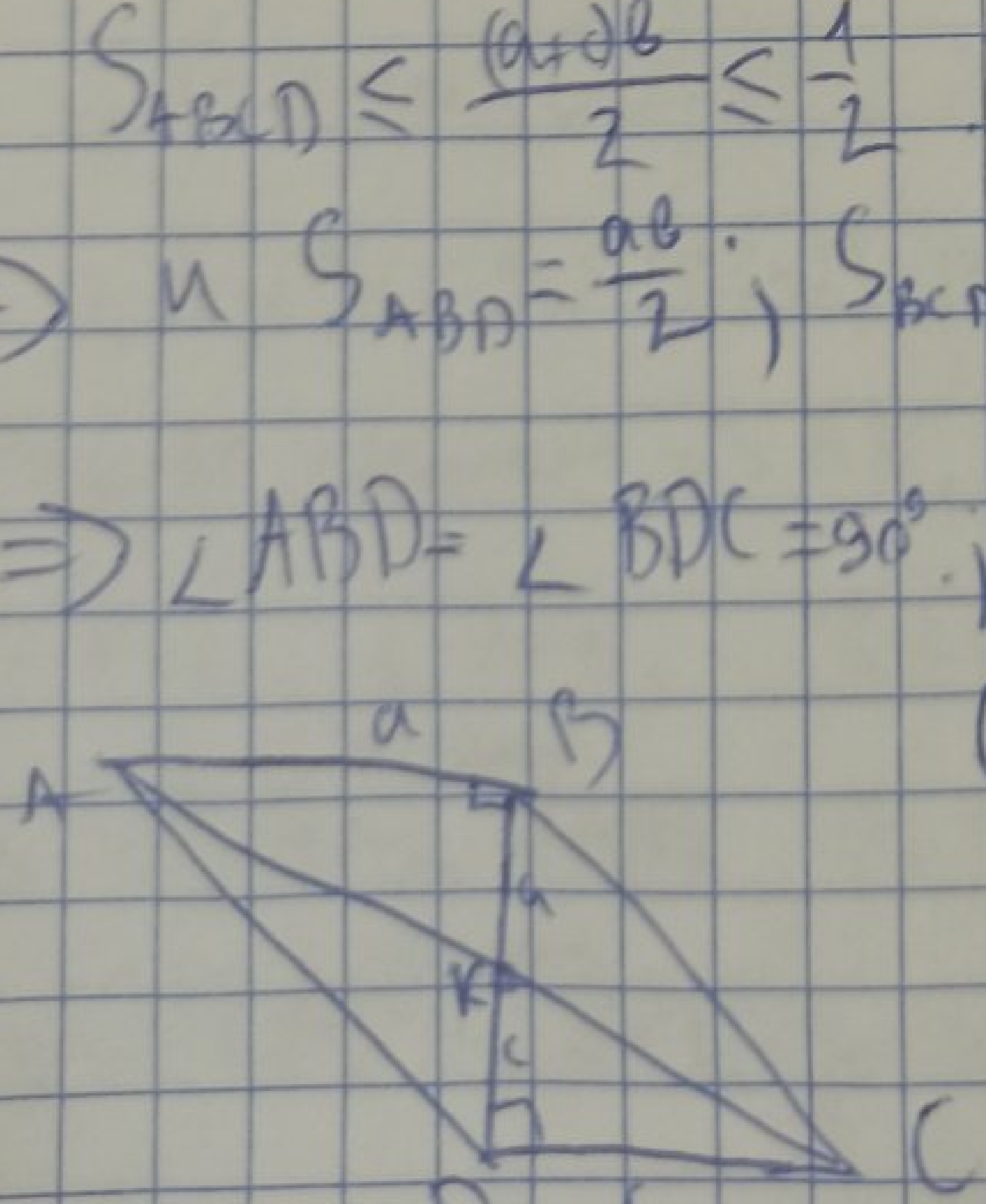
$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} \le \frac{ab+bc}{2} = \frac{(a+c)b}{2}$

$(a+c)b = \sqrt{(a+c)b}^2 \le \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \le \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$ по нер-ву Коши.

$S_{ABCD} \le \frac{(a+c)b}{2} \le \frac{1}{2}$. Поскольку рав-во достигается,

$\Rightarrow$ и $S_{ABD} = \frac{ab}{2}$; $S_{BCD} = \frac{bc}{2}$; $(a+c)b = \frac{a+b+c}{2}$; $a+b+c = 2$

$\Rightarrow \angle ABD = \angle BDC = 90°$; $a+c = b$; $\Rightarrow a+c = b = 1$.



Отметим на BD такую точку K, что $BK = a \Rightarrow DK = 1-a = c$.

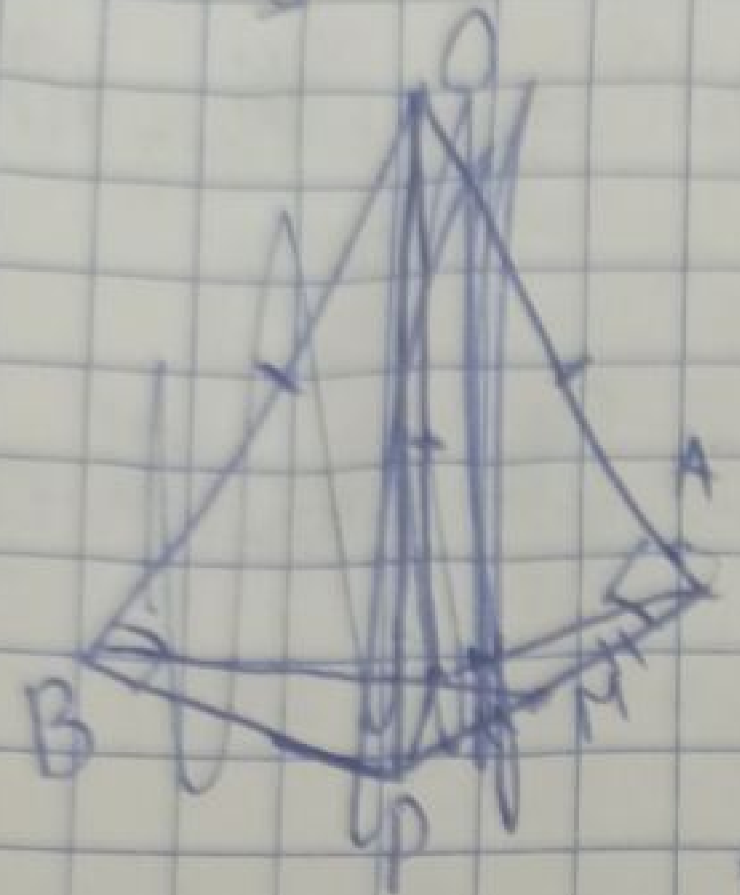
$\triangle ABK$ и $\triangle CDK$ р/б $\Rightarrow \angle AKB = \angle CKD = 45°$.

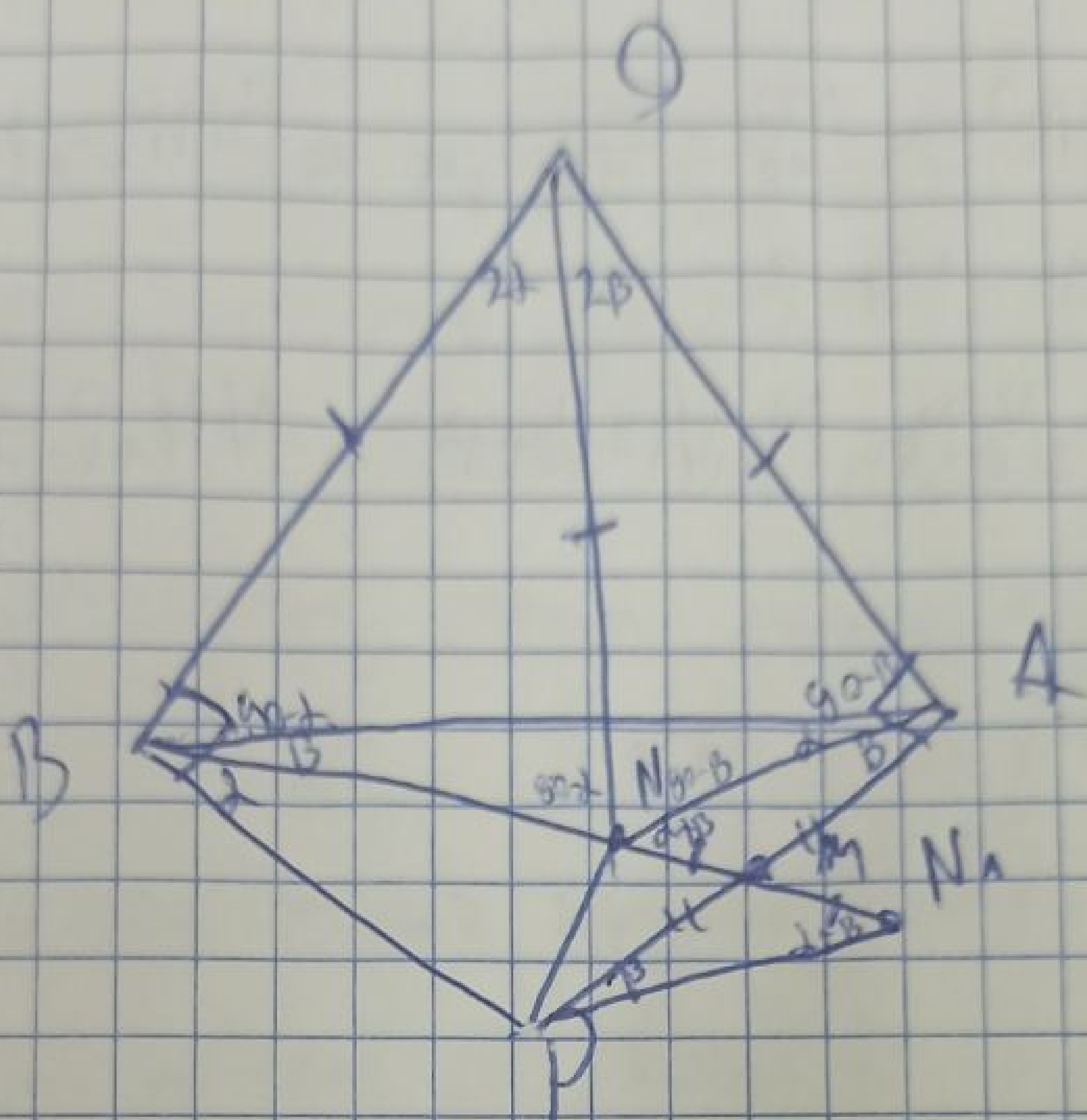
№4 (прод.)

$\Rightarrow$ AKC – одна прямая, т.к. у AC и BD одна точка пересечения, $\Rightarrow$ это и есть K, $\Rightarrow$ угол между диагоналями равен 45°.

Ответ: 45°.

№5





Отразили N отн. M в точку N_1.

Пусть $\angle PBN = \alpha$, $\angle PAN = \beta$. $\Rightarrow \angle OBN = 90^\circ - \alpha$, $\angle OAN = 90^\circ - \beta$

Т.к. $OB = ON$ и $ON = OA$, $\Rightarrow \angle OBN = \angle ONB = 90^\circ - \alpha$, $\angle OAN = \angle ONA = 90^\circ - \beta$

$\angle BON = 2\alpha$, $\angle NOA = 2\beta$. ABN вписан в окружность с ц. в точке O, $\Rightarrow \angle NBA = \frac{\angle NOA}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$, $\angle NAB = \frac{\angle NOB}{2} = \alpha$.

$\angle ANN_1 = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta$. NN_1 и AP делятся точкой пересеч. пополам, $\Rightarrow AN_1PN$ – параллелограмм, $\Rightarrow \angle PN_1N = \angle ANN_1 = \alpha + \beta$, $\angle APN_1 = \angle NAP = \beta$.

$\triangle ABM \overset{\text{по 2 углам}}{\sim} \triangle NAM$, $\Rightarrow NM \cdot BM = AM^2 = PM^2$

~~$\triangle PBM \sim \triangle NPM$, $\Rightarrow NM$~~

№5 (прод.)

$NM \cdot BM = PM^2$, $\Rightarrow \frac{NM}{MP} = \frac{MP}{MB}$, и $\angle BMP = \angle BMP$, $\Rightarrow \triangle PBM \sim \triangle NPM$

$\Rightarrow \angle NPM = \angle PBM = \beta$.

$\angle NPN_1 = \angle NPM + \angle MPN_1 = \alpha + \beta = \angle NN_1P$, $\Rightarrow PN = NN_1 = 2MN$, ч.т.д.

№6

Докажем, что среди этих 22 чисел было хотя бы 2 соседних перехода через десяток, при чём переход был не только к последней цифре 0, но и к 1. От противного. Предположим, что это не так. Тогда такой переход был максимум 1, $\Rightarrow$ чисел было максимум $9, 0, 1, \dots, 9, 0, 1, \dots, 9, 0$ — 21, противоречие. $\Rightarrow$ таких перехода было хотя бы 2.

Так как они соседние, $\Rightarrow$ хотя бы один из них не переходит через сотню, т. е. после числа $\overline{a9}$ следует $\overline{(a+1)0}$, где a — какое-то число. Но тогда среди чисел $\overline{a9}$ и $\overline{(a+1)1}$ у одного из них сумма чётна, т.к. суммы цифр a и $a+1$ разной чётности, и 1 и 9 оба нечётны. Но оба эти числа нечётны, т.к. заканчиваются на нечёт. цифру. $\Rightarrow$ 22 подряд идущих чисел жарщад быть не может, ЧТД.

№7

Подставим $x=2$; $y=-1$, $z=-1$; $x+y+z=2-1-1=0$

$$k(8-1-1)^2 \le (4+1+1)^3$$

$$k\cdot 6^2 \le k\cdot 6^3$$

$$k \le 6$$

Докажем, что для $k=6$ всегда работает

$\cancel{(x^2+y^2+z^2)^3 \ge 2(x^6+y^6}$

$z=-x-y$

$(x^2+y^2+z^2)^3 = (x^2+y^2+x^2+y^2+2xy)^3 = (2(x^2+y^2+xy))^3 = 8(x^2+y^2+xy)^3$

$(x^3+y^3+z^3)^2 = (x^3+y^3-x^3-y^3-3x^2y-3xy^2)^2 = (3x^2y+3xy^2)^2 = 9(x^2y+xy^2)^2$

$8(x^2+y^2+xy)^3 \overset{?}{\ge} 6\cdot 9(x^2y+xy^2)^2$

$4(x^2+y^2+xy)^3 \overset{?}{\ge} 27(x^2y+xy^2)^2$

$4x^6+4y^6+4x^3y^3+12x^4y^2+12x^2y^4+12x^5y+12x^4y^2+12xy^5+12x^2y^4+$

$+24x^3y^3 \overset{?}{\ge} 27x^4y^2+27x^2y^4+54x^3y^3$

$4x^6+4y^6+28x^3y^3+24x^4y^2+24x^2y^4+12x^5y+12xy^5 \overset{?}{\ge} 27x^4y^2+$

$+27x^2y^4+54x^3y^3$

$4x^6+4y^6+12x^5y+12xy^5 \overset{?}{\ge} 3x^4y^2+3x^2y^4+26x^3y^3$

$x^6+y^6 \ge 2\sqrt{x^6y^6} = 2x^3y^3$; $x^5y+xy^5 \ge 2\sqrt{x^6y^6} = 2x^3y^3$ по Коши

$12x^5y+12xy^5 \ge 24x^3y^3$

№7 (прод.)

$$x^6+y^6+12x^5y+12xy^5 \ge 26x^3y^3$$

$$3x^6+3y^6 \overset{?}{\ge} 3x^4y^2+3x^2y^4$$

$$x^6+y^6-x^4y^2-x^2y^4 \overset{?}{\ge} 0$$

$$x^4(x^2-y^2)-y^4(x^2-y^2) \overset{?}{\ge} 0$$

$$(x^2-y^2)(x^4-y^4) \overset{?}{\ge} 0$$

$$\underbrace{(x^2-y^2)^2}_{\ge 0}\underbrace{(x^2+y^2)}_{\ge 0} \overset{?}{\ge} 0$$

Все переходы были равносильными, $\Rightarrow$ для $k=6$ это верно, и для $k>6$ это не верно. $\Rightarrow k=6$.

Ответ: $k=6$.