# №1

1) Рассмотрим любой вид квадрата:

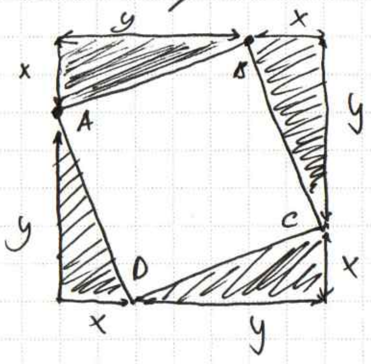



рис.1

- Пусть это будет квадрат вида $(x;y)$ причём: $n>x\geq 0$
$n\geq y>0$
где $n$ - сторона исходного квадрата (в нашем случае $=9$)

2) Теперь рассмотрим где может находится верхняя из левых вершин (на рис1 это вершина A). Тогда:

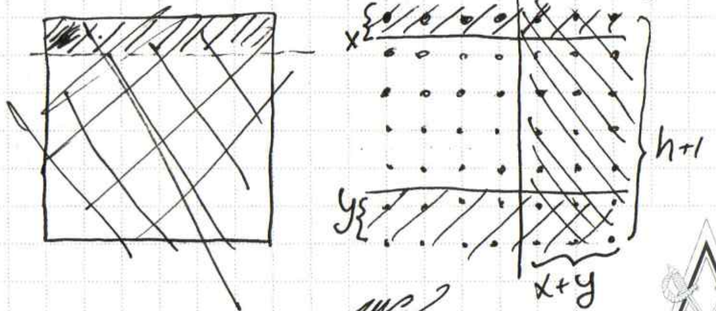



рис2

из Рис.2 видно что квадратов вида $(x;y)$ ровно: $(n+1-x-y)^2$
если $x+y<n+1$
(иначе 0)

3) Заметим, что количество зависит не от $x$ и $y$ отдельно, а только от их суммы. Тогда рассмотрим всевозможные суммы (которые $<10$)

| $x \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | | | | | | |
| 7 | 8 | 9 | | | | | | | |
| 8 | 9 | | | | | | | | |
| ~~9~~ | | | | | | | | | |

Тогда всех квадратов будет:

$$(10-1)^2+2(10-2)^2+3(10-3)^2+4(10-4)^2\ldots$$

$$\ldots+9(10-9)^2=81+2\cdot64+3\cdot49+4\cdot36+5\cdot25+$$

$$+6\cdot16+7\cdot9+8\cdot4+9\cdot1=81+128+147+144+$$

$$+125+96+63+32+9=90+160+$$

$$+210+240+125=825$$

Ответ: 825.

№2

1) Пусть у нас в последовательности в какой-то момент появилась четверка цифр: $\ldots a_n\, a_{n+1}\, a_{n+2}\, a_{n+3}\ldots$. Тогда если перед $a_n$ была $a_{n-1}$, то:

$$(a_{n-1}+a_n+a_{n+1}+a_{n+2})\underset{\bmod 10}{\equiv}10x+a_{n+3}\underset{10}{\equiv}a_{n+3}$$

$$a_{n-1}\equiv a_{n+3}-a_n-a_{n+1}-a_{n+2}\pmod{10}$$

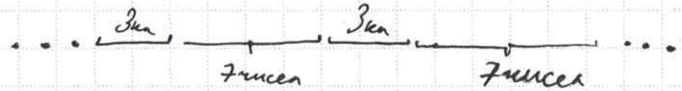
но такое число $a_{n-1}$ от 0 до 9 будет ровно 1 $\Rightarrow$ $a_{n-1}$ – определяется однозначно $\Rightarrow$ у любой одинаковой четверки будет одинаковая „пред" последовательность.

2) Пусть начов с 2,0,2,3 у нас никогда не было одинаковых четверок, но т.к. п-ть бесконечна, то мы можем выделить первые $10^4+1$ четверок и средини по принципу Дирихле будут хотя бы 2 одинаковых значит Противоречие!

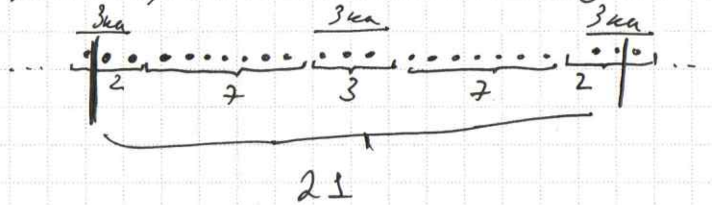
3) Значит будет четверка A каждая повторилась хотябы 1 раз (но т.к. после одинаковых четверок последовательность ведет себя одинаково, то A будет повторятся бесконечное число раз), то тогда у первого вхождение в последовательность четверки A в ~~последовательности~~ пос-ти была четверка 2,0,2,3 причем она была на расстоянии меньше цикла (встречание четверок A в последовательность), но значит у второго вхождение A есть в последнос-ти 2,0,2,3 что идет после первого вхождение A.
А значит это будет еще одно вхождение 2,0,2,3 (и так как цикл повторяется, то 2,0,2,3 будет встречатся бесконечное кол-во раз) ч.т.д.

№4

1) Предположим такие числа нашлись тогда найдутся хотя бы две тройки чисел среднее из которых делится на 10 (такие как 19, 20, 21 или 1399, 1400, 1401) это так т.к.:




Ведь если бы брать 1 или меньше тройки, то это максимум:




А у нас 22 противоречие!
Значит такие 2 тройки найдутся (причем числа делящиеся на 10 в этих тройках будут: $10x$ и $10(x+1)$)

А значит в одной из троек число делящееся на 10 будет $\vdots 10$ но $\not\vdots 100$.
Рассмотрим тройку с такими числами:

$\dots 10x-1,\ 10x,\ 10x+1 \dots \quad x \not\vdots 10$

Заметим также, что:

$S(10x-1) = S(10x)+8$

$S(10x+1) = S(10x)+1$

тогда либо $S(10x-1)$ или $S(10x+1)$ — четное число Но $10x+1$ и $10x-1$ это не четные числа $\Rightarrow$ либо $10x+1 \not\vdots S(10x+1)$ или $10x-1 \not\vdots S(10x-1)$

Противоречие! ч.т.д.

* $S(x)$ — сумма цифр числа $x$.

№5

1) $k(x^3+y^3+z^3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3$

Если $x^3+y^3+z^3=0$ то тогда $k$-любое
Тогда разберем случай при $x^3+y^3+z^3 \neq 0$
(Значит Б.О.О. можно утверждать, что $x \neq 0$)

2) Заметим, что $(x^3+y^3+z^3)^2 > 0$, тогда:

$$k \le \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^3 : x^6}{(x^3+y^3+z^3)^2 : x^6} =$$

$$= \frac{(1+a^2+b^2)^3}{(1+a^3+b^3)^2}$$

$a=\frac{y}{x};\ b=\frac{z}{x}$

Также заметим, что раз $x+y+z=0 \ | :x$

$1+a+b=0$

$a+b=-1$

3) Раз $a+b=-1$, то:

$(a+b)^2=1$

$a^2+b^2+2ab=1$

$a^2+b^2+1 = 2-2ab$

4) также $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$= -1\cdot(1-3ab) = 3ab-1$

5) Тогда: $k \le \dfrac{8(1+ab)^3}{9a^2b^2}$

Также $b = -1 - a = -(1+a)$

Значит:

$$k \le \frac{8(1+a(1+a))^3}{9a^2(1+a)^2} = \frac{8(1+a+a^2)^3}{9a^2(1+a)^2}$$

где a – любое

Значит найдем производную от:

$$f(x) = \frac{8(1+x+x^2)^3}{9x^2(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8}{9}\,\frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

– $g(x) = x^2(1+x)^2 \Rightarrow g'(x) = (x^2)'(x+1)^2 + ((x+1)^2)' \cdot x^2 = 2x(x+1)^2 + 2x^2(x+1)$

– $h(x) = (1+x+x^2)^3 \Rightarrow h'(x) = 3(x^2+x+1)^2 \cdot (x^2+x+1)' = 3(x^2+x+1)^2(2x+1)$

Нам нужно найти при каких $x$; $f'(x)=0$, а будет это тогда когда:

$$\begin{cases} h'(x)g(x) - h(x)g'(x) = 0, \\ g^2(x) \ne 0; \end{cases}$$

① $\begin{cases} h'(x)g(x) = h(x)g'(x), \\ \begin{cases} x \ne 0, \\ x \ne -1; \end{cases} \end{cases}$

I) $3(x^2+x+1)^2(2x+1) \cdot x^2(1+x)^2 = (x^2+x+1)^3 \cdot 2x(x+1)(2x+1)$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{ll} 1 & x^2+x+1=0 \\ 2 & x=0 \\ 3 & x+1=0 \\ 4 & 2x+1=0 \\ 5 & 3x(x+1) = 2(x^2+x+1) \end{array}\right.$$

3 и 2 – точно не верны т.к. $\begin{cases} x \ne 0, \\ x \ne -1; \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ll} 1 & x^2+x+1=0, \\ 4 & x=-0{,}5; \\ 5 & 3x^2+3x = 2x^2+2x+2; \end{array}\right.$$

1 – решений нет

$$\left[\begin{array}{ll} 4 & x=-0{,}5, \\ 5 & x^2+x-2=0; \end{array}\right.$$

⑤: $D = 1+8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Значит: $\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \\ x=-0{,}5; \end{array}\right.$



LVIII Уральский турнир юных математиков Киров 2022

При каком-то из этих $x$ будет наименьшее значение $f(x)$:

$f(1) = f(-\frac{1}{2}) = f(-2) = 6$

Тогда

$f(x) \geq 6$

Т.е. если $k=6$, то все верно, но если $k>6$, то:

можно взять $x=1$, $y=-2$, $z=1$ и тогда:

$k(1^3-8+1)^2 \leq (1+4+1)^3$

$k(-6)^2 \leq 6^3$

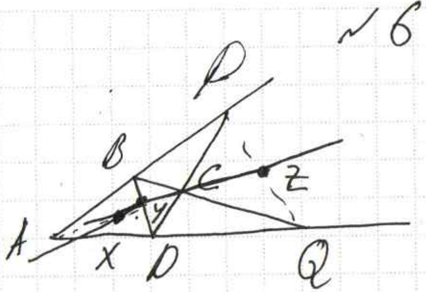
$6 < k \leq 6$

не верно!

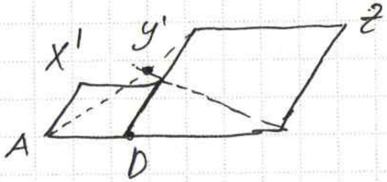
ПРОТИВОРЕЧИЕ $\Rightarrow k=6$

Ответ: наибольшее $k=6$.

№6

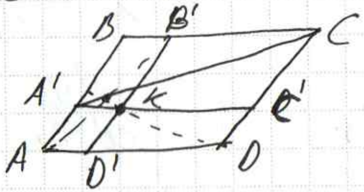



Сделаем гомотетию точек $X, Y, Z$ с центром $D$ и коэффициентом 2:




Значит если докажем, что $X', Y', Z'$ лежат на одной прямой, то и $X, Y, Z$ — тоже!

Лемма:




$ABCD$ — параллелограмм:

$BC \parallel A'C' \parallel AD$, $AB \parallel B'D' \parallel CD$ $\Rightarrow DK$, $AB'$ и $A'C$ пересекаются в 1 точке

(Если доказать эту лемму, то и задача доказана!)

Для доказательства доказал, что $DK$ и $AB'$ — делят в одинаковом отношении ~~прямую~~ отрезок $A'C$

1) Для прямой $DK$: $DK$ и $A'C$ пересекаются в точке $X$ тогда по т. Менелая для $\triangle A'CC'$ и прямой $DK$:

$$\frac{CD}{DC'}\cdot\frac{C'K}{KA'}\cdot\frac{A'X}{XC} \Rightarrow \frac{A'X}{XC}=\frac{DC'\cdot KA'}{CD\cdot C'K}$$

2) Для прямой $AB'$: $AB'$ и $A'C$ пересекаются в точке $Y$ тогда по т. Менелая для $\triangle A'BC$ и прямой $AB'$ верно:

$$\frac{A'Y}{YC}\cdot\frac{CB'}{B'B}\cdot\frac{BA}{AA'} \Rightarrow \frac{A'Y}{YC}=\frac{AA'\cdot BB'}{CB'\cdot BA} =$$

$$= \underbrace{\frac{DC'\cdot A'K}{C'K\cdot CD}}_{\text{по св-ву параллелограммов (противолежащие стороны равны)}}=\frac{A'X}{XC} \quad \text{ЧТД.}$$

ЧТД

№3

1) По обобщенной формуле Брахмагупты ~~для~~ верно следующее:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\Theta}$$

где $\Theta$ — ~~ку~~ полусумма любой пары противоположных углов.

2) тогда раз $p = a+c = b+d$, то:

$$S=\sqrt{abcd(1-\cos^2\Theta)} = \sqrt{abcd}\,\sin\Theta$$

а по условию: $S=\sqrt{abcd}$, значит

$\sin\Theta=1$

$\Theta=90^\circ \Rightarrow$ сумма одной из пар противоположных углов $=180^\circ$

$\Downarrow$

Этот четырехуг. вписан в окр.

ЧТД.