Задача №1

Рассмотрим выражение

$\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$ Поскольку это квадрат, то оно всегда неотрицательн

$$\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2 = 4a^2-2a+\frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow 2a-4a^2 \leq \frac{1}{4}$$

Аналогично $2b-4b^2 \leq \frac{1}{4}$ и $2c-4c^2 \leq \frac{1}{4}$

Тогда складываем выражения из условия

$$(a+c-4b^2)+(a+b-4c^2)+(b+c-4a^2) \overset{?}{=}$$

$$= 2a+2b+2c-4a^2-4b^2-4c^2 = (2a-4a^2)+(2b-4b^2)+$$

$$+(2c-4c^2) \leq \frac{3}{4}$$ т.к. каждое из слагаемых $\leq \frac{1}{4}$

Значит все три числа не могут быть больше $\frac{1}{4}$

Задача №2

Разложим на множители $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

По условию нужно найти вероятность того, что выбранное число будет взаимно простым с 2024. Посчитаем сначала сколько чисел из [1;2023] имеет общие делители с 2024 отличные от 1.

1) Все чётные числа - 1011 штук
2) Все нечётные, делящиеся на 11

$$2023 = 11 \cdot 183 + 10$$

из 183 чисел выбираем нечётные - 92 штук

3) Все нечётные, делящиеся на 23, но не на 11

$$2023 = 23 \cdot 87 + 22$$

Из 87 чисел убираем чётные и $11 \cdot 23$, $33 \cdot 23$, $55 \cdot 23$, $77 \cdot 23$. Получаем $44-4=40$ штук

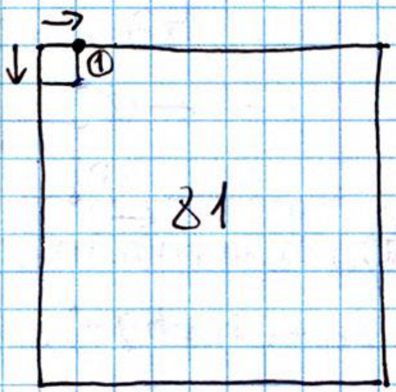
Значит чисел взаимно простых с 2024 на $[1; 2023]$ всего:

$$2023-(1011+92+40)=880 \text{ штук}$$

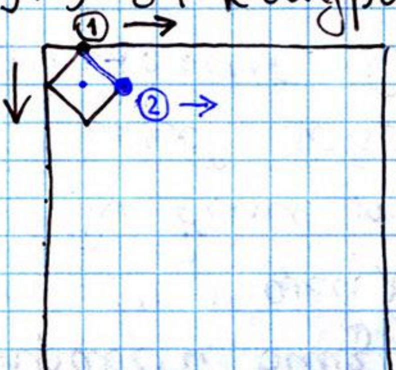
и вероятность выбора такого числа $\frac{880}{2023}$

Ответ: $\frac{880}{2023}$

Задача №3



Заметим, что квадрат однозначно задает одна сторона или две вершины. Возьмем квадрат 1×1, выделим одну вершину (правую верхнюю ①) и будем двигать ее вправо, затем вниз, смещая таким образом квадрат 1×1. Получим $9 \times 9 = 81$ квадрат.

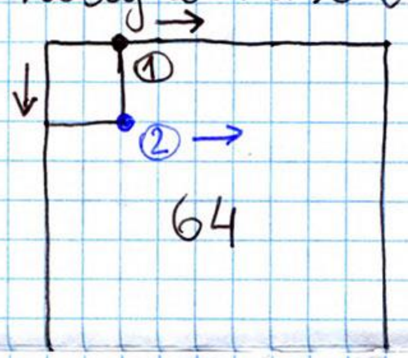


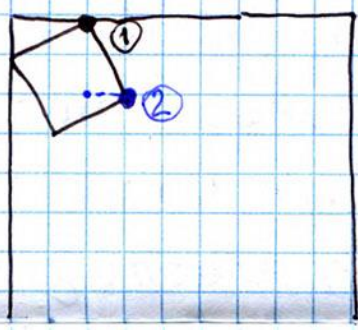
Теперь зафиксируем точку ① и сдвинем на 1 клетку точку под ней ②. Получим квадрат со стороной $\sqrt{2}$, повернутый на 45°. Теперь будем двигать точку ① вправо и вниз в пределах 9×9 и получим $8*8=64$ таких квадратов.

То есть точка (2) отвечает за изменение размеров квадратов, а точка (1) – за их смещение. Далее будем смещать на 1 клетку точку (2) и двигать полученный квадрат вправо и вниз, получим

$9\times9+8\times8+7\times7+6\times6+5\times5+4\times4+3\times3+2\times2+1=$

$=81+64+49+36+25+16+9+4+1$ квадратов, полученных из 1×1 смещением точек (1) и (2)

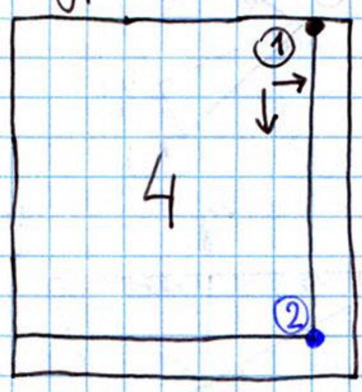


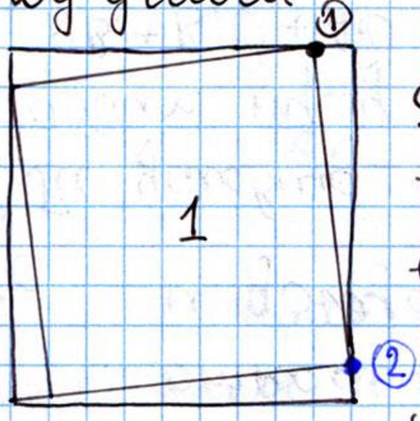


Аналогично рассмотрим квадрат 2×2. Двигая точку (2) и сдвигая полученные квадраты точкой (1) получим разных квадратов

$8\cdot8+7\cdot7+6\cdot6+5\cdot5+4\cdot4+3\cdot3+2\cdot2+1=64+49+36+25+$
$+16+9+4+1$

И так далее. Предпоследний квадрат 8×8 будет образовываться сдвигом точек 4 прямых квадрата и 1 под углом





Сложим все суммы

$S=81+2\cdot64+3\cdot49+4\cdot36+$
$+5\cdot25+6\cdot16+7\cdot9+8\cdot4+$
$+9\cdot1=9(9+1)+8(2\cdot8+2\cdot2)$
$+7(3\cdot7+3\cdot3)+6(4\cdot6+4\cdot4)$
$+5\cdot5\cdot5=9\cdot10+8\cdot20+$
$+7\cdot30+6\cdot40+125=90+160+210+240+125=825$

Ответ: 825 квадратов

Задача №4.

Ответ: встретятся

По условию первые цифры последовательности следующие: 2, 0, 2, 3, 7, 2, 4, 6, 9, 1, ...

Пусть четыре соседних цифры будут a, b, c, d. Определим предшествующую цифру e. По условию d - остаток от деления $e+a+b+c$ на 10 $\Rightarrow e+a+b+c=10k+d$, $k \in \mathbb{Z}$. Выразим $e=10k+d-a-b-c$.

Т.к. $0 \le e \le 9$ (это цифра), то e - остаток от деления на 10 числа $d-a-b-c$.

Если некое число p делится на q с остатком r, то $p=sq+r$ $(0 \le r < q)$

При этом цифра e определяется однозначно (потому что остаток определяется однозначно).

Таким образом, двум одинаковым четверкам цифр, стоящих рядом в последовательности 20237246..., предшествует одна и та же цифра. Различных четверок цифр - от 0000 до 9999 всего 10000 штук. А заданная последовательность - бесконечная, значит какая-то четверка встретится второй раз. Обозначим эту четверку как a, b, c, d. Тогда последовательность можно записать как

20237246...eabcd... fabcd...

Запишем эту же последовательность еще раз, сдвинув ее влево так, чтобы четверки a,b,c,d совместились

... eabcd.... fabcd

eabcd....fabcd....

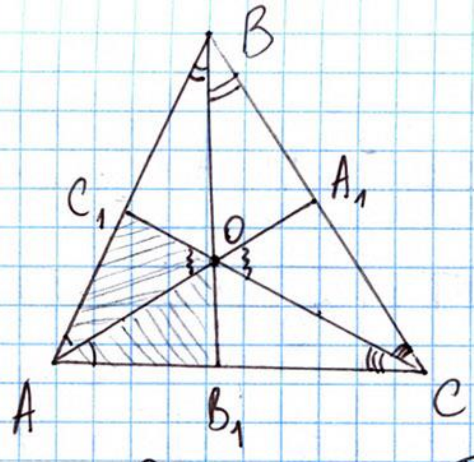
Мы уже доказали, что перед одинаковыми четверками стоят одинаковые цифры => e=f.

Значит попарно совпадают цифры, предшествующие e и f, если двигаться в обратном направлении. Поэтому под цифрами 2023 в верхней последовательности стоят цифры 2023

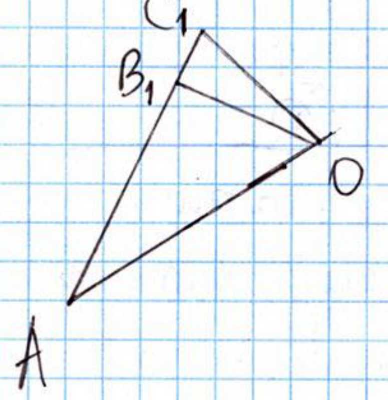
в нижней последовательности.

Значит последовательность 2023 встречается в бесконечной последовательности 20237246 ещё раз

Задача №5.



Совместим треугольник $\triangle AC_1O$ и $\triangle AB_1O$ и отразим относительно AA_1 и допустим, что $AB_1 < AC_1$



По условию периметры обоих треугольников равны

$AB_1 + B_1O + AO = AC_1 + C_1O + AO$

$AB_1 + B_1O = AC_1 + C_1O$ (1)

Т.к. $AC_1 = AB_1 + B_1C_1$, то подставляя в (1) получим

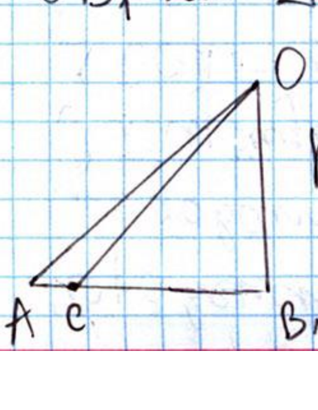
$AB_1 + B_1O = AB_1 + B_1C + C_1O \Rightarrow B_1O = B_1C + C_1O$

А по неравенству треугольника это невозможно. Значит $\triangle AC_1O = \triangle AB_1O$ (с учетом отражения). Так же получим равенство треугольников: $\triangle BC_1O = \triangle BA_1O$, $\triangle CA_1O = \triangle CB_1O$

Из последних равенств следует, что $OA_1 = OB_1 = OC_1$.

Два угла $\angle C_1OA = \angle A_1OC$ как вертикальные.

Из равенства $\triangle AC_1O = \triangle AB_1O$ следует, что $\angle C_1OA = \angle B_1OA = \angle A_1OC = \angle B_1OC$. $\Rightarrow$ мы можем наложить $\triangle B_1OC$ с отражением относительно OB_1 на $\triangle B_1OA$. Рассуждая аналогично началу



предполагаем $B_1C < B_1A$. В силу равенства периметров $AO + AB_1 = CO + CB_1$, $AB_1 = AC + B_1C$ Подставляем, получаем $AO + AC = CO$ - противоречит

неравенству треугольника ΔAOC.
Следовательно $\Delta AOB_1 = \Delta COB_1$.
Рассуждая аналогично, получаем
$\Delta COA_1 = \Delta BOA_1$ и $\Delta BOC_1 = \Delta AOC_1$, а значит все внутренние треугольники равны.

Поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то $180^\circ : 6 = 30^\circ$ - это углы, на которые разбивают биссектрисы в вершинах ΔABC => $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ и ΔABC - равносторонний

Задача 6.

Всего клеток – 10000. Т.к. играют по очереди, то единиц в итоге будет 5000 и общая сумма будет чётной. Поэтому если найдётся хотя бы одна строка с нечётной суммой, то обязательно будет и вторая – количество нечётных сумм должно быть чётным.

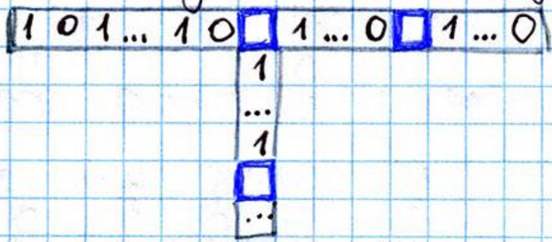
Первый игрок независимо от действий второго вписывает единицы в первую строку, пока в ней не останутся 2 свободные клетки. Далее он считает сумму в этой строке:

1. Если сумма чётная, то он вписывает ещё 1 единицу в одну из этих клеток, а вторую оставляет пустой до конца игры – согласно очерёдности ее заполнит второй игрок (он делает последний ход). Тогда мы получим строку с нечетной суммой, а значит таких строк будет не менее 2. Первый игрок победил.

2. Если сумма в первой строке нечётная, то первый игрок начинает заполнять единицами столбец под одной из пустых клеток (такой столбец найдётся, т.к. второй не успеет заполнить так, чтобы его не нашлось)

не трогая клетку первой строки, пока в заполняемом столбце не останется 2 свободных клеток. Если за это время второй игрок заполнит одну из клеток первой строки, то получим первую строку с нечетной суммой и одной пустой клеткой. Первый игрок оставляет ее пустой до конца игры и побеждает.

Иначе мы получаем следующую ситуацию



Считаем сумму в столбце. Если она чётная, вписываем единицу в любую из 2 пустых клеток, а вторую не трогаем до конца игры. В итоге первый игрок победит. Если сумма в столбце нечётная, то мы получим первую строку и столбец под пустой клеткой с нечётными суммами. Если второй игрок заполнит любую из 3-х пустых клеток (1 в строке, 1 в столбце, 1 на пересечении строки и столбца), то первый игрок побеждает (он заполняет одну клетку до нечётной суммы в столбце, вторую оставляет незаполненной до конца игры). Если же перед ходом первого игрока все эти 3 клетки свободны, то он вписывает единицу в клетку на пересечении, получая чётную сумму и в первой строке и в столбце. При этом в них останется по одной пустой клетке и за следующий ход второй игрок не сможет заполнить их обе. Значит в оставшуюся свободную клетку первый игрок впишет единицу.

При правильной игре всегда выигрывает первый игрок

Задача №7.

Утверждение 1: если число нечётно, а сумма цифр - чётная, то это число - не "харшад". Действительно, в этом случае делителем нечётного числа является чётное число и это противоречит его нечётности (у нечётного числа нет в делителях двойки).

Утверждение 2: последовательные 22 числа будут входить в три различных десятка.
Докажем от противного. Пусть существуют 22 последовательных числа "харшад". Сначала рассмотрим вариант, когда

все 22 числа ряда входят в одну сотню, т.е. в разряде сотен цифра одинакова.

Рассмотрим числа из того десятка, который является наименьшим и в нем есть хотя бы 2 числа ряда (если нет 2 чисел, то берем следующий десяток - согласно Утв. 2 он всегда найдется). Пусть эти числа имеют вид $\overline{a_1 \ldots a_k b c}$. Возьмем из этих чисел любое нечётное $\overline{a_1 \ldots a_k b c}$ ($c \not\vdots 2$) и его сумма цифр равна $a_1 + \ldots + a_k + b + c$. Нечётное число будет "харшад", только

если сумма цифр в нем будет нечетной
Значит a_1+a_k+b+c – нечётно.
Посмотрим на число, которое на 10 больше, т.е. имеет вид $\overline{a_1\ldots a_k\, b{+}1\, c}$ – оно также нечётно (т.к. $c \not\vdots 2$), но сумма цифр $a_1+a_k+b+1+c$ – на единицу больше, то есть чётно. Значит оно не "харшад" но при этом входит в 22 числа ряда (по Утв. 2). Получили противоречие $\Rightarrow$ в пределах одной сотни 22 последовательн "харшад" чисел не существует.

Рассмотрим, когда числа ряда в двух разных сотнях. Тогда среди них найдутся такие, у которых $b=9$ и $b=0$
Рассмотрим 21 последовательное число, заканчивающееся цифрами
$\overline{\ldots 90}$, $\overline{\ldots 91}$, $\overline{\ldots 92}$, $\overline{\ldots 93}$, $\overline{\ldots 94}$, $\overline{\ldots 95}$, $\overline{\ldots 96}$, $\overline{\ldots 97}$, $\overline{\ldots 98}$, $\overline{\ldots 99}$, $\overline{\ldots 00}$, $\overline{\ldots 01}$, $\overline{\ldots 02}$, $\overline{\ldots 03}$, $\overline{\ldots 04}$, $\overline{\ldots 05}$, $\overline{\ldots 06}$, $\overline{\ldots 07}$, $\overline{\ldots 08}$, $\overline{\ldots 09}$, $\overline{\ldots 10}$. Тогда 22-ое число должно быть $\overline{\ldots 89}$ или $\overline{\ldots 011}$ (дописывается в начало или конец ряда).
Если это $\overline{\ldots 89}$ (т.е. $b=8$, $c=9$ для вида $\overline{a_1\ldots a_k bc}$), то это число нечетно ($c \not\vdots 2$), и сумма цифр в нем $a_1+\ldots+a_k+b+c$ – нечётно (Утв 1), иначе оно не "харшад." Т.е.
$a_1+\ldots+a_k+8+9=a_1+\ldots+a_k+17$ – нечетно

При этом число $\overline{\ldots 91}$ так же нечётно, входит в ряд, но сумма цифр в нем $a_1+\ldots+a_k+9+1=a_1+\ldots+a_k+10$ - чётно (оно равно $\underbrace{a_1+\ldots+a_k+17}_{\text{нечетно}}-\underbrace{7}_{\text{нечетно}}$ - разность двух нечётных - чётно), а значит оно не "хармад" (Утв. 1). Получили противоречие.

Если мы припишем 22-м числом $\overline{\ldots 11}$, то оно нечётно и сумма цифр должна быть нечётной (Утв. 1) $\Rightarrow a_1+\ldots+a_k+1+1=a_1+\ldots+a_k+2$ нечётно. Но число $\overline{\ldots 09}$ так же нечётно, а сумма цифр $a_1+\ldots+a_k+0+9$ - чётна (действительно $a_1+\ldots+a_k+9=\underbrace{a_1+\ldots+a_k+2}_{\text{нечётно}}+\underbrace{7}_{\text{нечёт}}$, а сумма двух нечётных - чётна) Получили противоречие.

Таким образом ряд не может быть дописан ни слева от последовательности $\overline{\ldots 90}\ldots\overline{\ldots 10}$, ни справа.

Значит ни в каком варианте 22 последовательных "хармад" чисел не существует.