Задача N 1

Для начала заметим, что $\sin\left(\frac{9\pi}{30}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Положим $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \alpha$

Тогда: $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 3\alpha - 4\alpha^3 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\alpha^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 3\alpha - 4\alpha^3 = 1 - 2\alpha^2$

при $\alpha = 1$: $-1 = -1$ $\quad 3\alpha - 4\alpha^3 - 1 + 2\alpha^2 = (\alpha - 1)(4\alpha^2 + 2\alpha - 1) = 0$

$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

т.к. $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ – не подходит. $\alpha = 1$ не подходит т.к. $\frac{3\pi}{10} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Значит $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\sqrt{5} > 2{,}23607 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{4} > 0{,}309 > 0{,}3 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0{,}3$

$\sin\left(\frac{3\pi}{30}\right) > 0{,}3$

$\sin\left(\frac{3\pi}{30}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{30}\right) \cdot 3 - 4\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)^3$. Т.к.

$\sin\left(\frac{\pi}{30}\right) > 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{30}\right) \cdot 3 - 4\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)^3 < 3\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)$

т.е. $3\sin\left(\frac{\pi}{30}\right) > 0{,}3 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{30}\right) > 0{,}1$ ∎

Задача №2

Для начала заметим, что если у нас имеется несколько подряд идущих чисел „харшад" среди чисел вида X00, X01; X02 ... X99, то таких подряд идущих среди таковых чисел не более 11 (X — произвол. посл. цифр, образующая число).
положим, что число α — число харшад.
тогда, если $\alpha+9$ число харшад, $\alpha \neq 0 (\text{mod } 10)$ и в разряде десятков у α не стоит "9", то $S(\alpha) = S(\alpha+9)$, где $S(x)$ — ф-ция суммы цифр.
тогда т.к. $\left.\begin{array}{l}\alpha \,\vdots\, S(\alpha) \\ \alpha+9 \,\vdots\, S(\alpha)\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+9-\alpha \,\vdots\, S(\alpha) \Rightarrow 9 \,\vdots\, S(\alpha)$

т.е. $S(\alpha) \in \{1; 3; 9\}$

если $S(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha \in \{1, 10, 100, 1000\}$
если $S(\alpha)=3 \Rightarrow \alpha \in \{3, 12, 111, 120, 102, \ldots\}$
если $S(\alpha)=9 \Rightarrow \alpha \in \{9; 18; 27; \ldots\}$
не трудно видеть, что наибольшее число чисел харшад ~~удовл. нам~~ в сотне получается при $S(\alpha)=9$. Если же $\alpha \not\vdots\, 3 \Rightarrow S(\alpha)=1$ гарантировано.
Разобьём числа в сотне на группы по 12 чисел, т.е.
$\{\{X00, \ldots X11\}, \{X12, \ldots X23\}, \ldots$
$\ldots \{X96; X97; X98; X99\}\}$. Среди 12 чисел $\exists$ 3 пары отличающихся на 9 и хотя бы у одной из пар выполняется условие выше $\Rightarrow$ в каждой сотне не более 11 подряд идущих чисел харшад.

т.е. среди подряд идущих чисел Жартаd не более 22.

22 может быть только и только в том случае, если это числа $\cancel{X}87$; $\cancel{X}88$; $\cancel{X}89$ ... $\cancel{X}99$; $(X+1)00$ $0(X+1)01$ ...

... $(X+1)11$. Но тогда получается, что либо ~~сотня~~ в ~~сотне~~ мн-ве $\{X00; \ldots X09\}$, либо в мн-ве $\{(X+1)00; \ldots (X+1)99\}$ $\exists$ 12 подряд идущих чисел Жартаd, что противоречит выведенному ранее. => $\exists$ не более 21 подряд идущих чисел Жартаd ∎

№3

$$\begin{cases} k(x^3+y^3+z^3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3 \\ \cancel{x+y+z=0}\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}.\ x+y+z=0 \end{cases}$$

*

$z=-(x+y)^3 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 = x^3+y^3-x^3-3x^2y-3xy^2-$
$-y^3 = 3xy(-x-y) = 3xyz$

тогда $k(x^3+y^3+z^3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k\,x^2y^2z^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3$

$9k\,x^2y^2(x+y)^2 \le (x^2+y^2+(x+y)^2)^3$

$8x^6+8y^6+56x^3y^3+48x^4y^2+24x^5y+48x^2y^4+24xy^5 \ge$
$\ge 9k(x^4y^2+x^2y^4+2x^3y^3)$

при $y=0$: $8x^6 \ge 0$ — верно $\forall x \in \mathbb{R}$
при $x=0$: $8y^6 \ge 0$ — верно $\forall y \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow$ пусть

$\begin{cases} x \ne 0 \\ y \ne 0 \end{cases}$ поделим части нер-ва на x^3y^3:

$$8\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)+48\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+24\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+56 \ge$$
$$\ge 9k\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)$$

положим $\alpha = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

$\cancel{\alpha \in (a;\infty)}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (-2;2)$

$\alpha^2 = \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2} = \alpha^2-2$

$\alpha^3 = \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}+3\frac{x}{y}+3\frac{y}{x}+\frac{y^3}{x^3} \Rightarrow \frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} = \alpha^3-3\alpha$

$8(\alpha^3-3\alpha)+48\alpha+24(\alpha^2-2)+56 \ge 9k(\alpha+2)$

$8(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1) \ge 9k(\alpha+2)$

$8(\alpha+1)^3 \ge 9k(\alpha+2)$

выражение слева ведёт себя как кубическая парабола в сис. ОСК $\beta O\alpha$

где β — значение ф-ции α

Найдём значение $9k$, при котором $\alpha+2$ проходит через точку $(2; 27)$

$$\frac{9k}{8}\cdot 4 = \frac{9k}{2} = 27 \Rightarrow 9k=54$$

При данном значении график слева касается $\alpha+2$

$$(\alpha+1)^3 = \frac{27}{4}(\alpha+2) \Leftrightarrow 4\alpha^3+12\alpha^2-15\alpha-50=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)(4\alpha^2+20\alpha+25)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=2\\ \alpha=-\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

Значит касание в точке при $\alpha=-\frac{5}{2}$

при $9k \geq 54$ $\exists$ промежуток при котором

$\alpha+2 > (\alpha+1)^3$

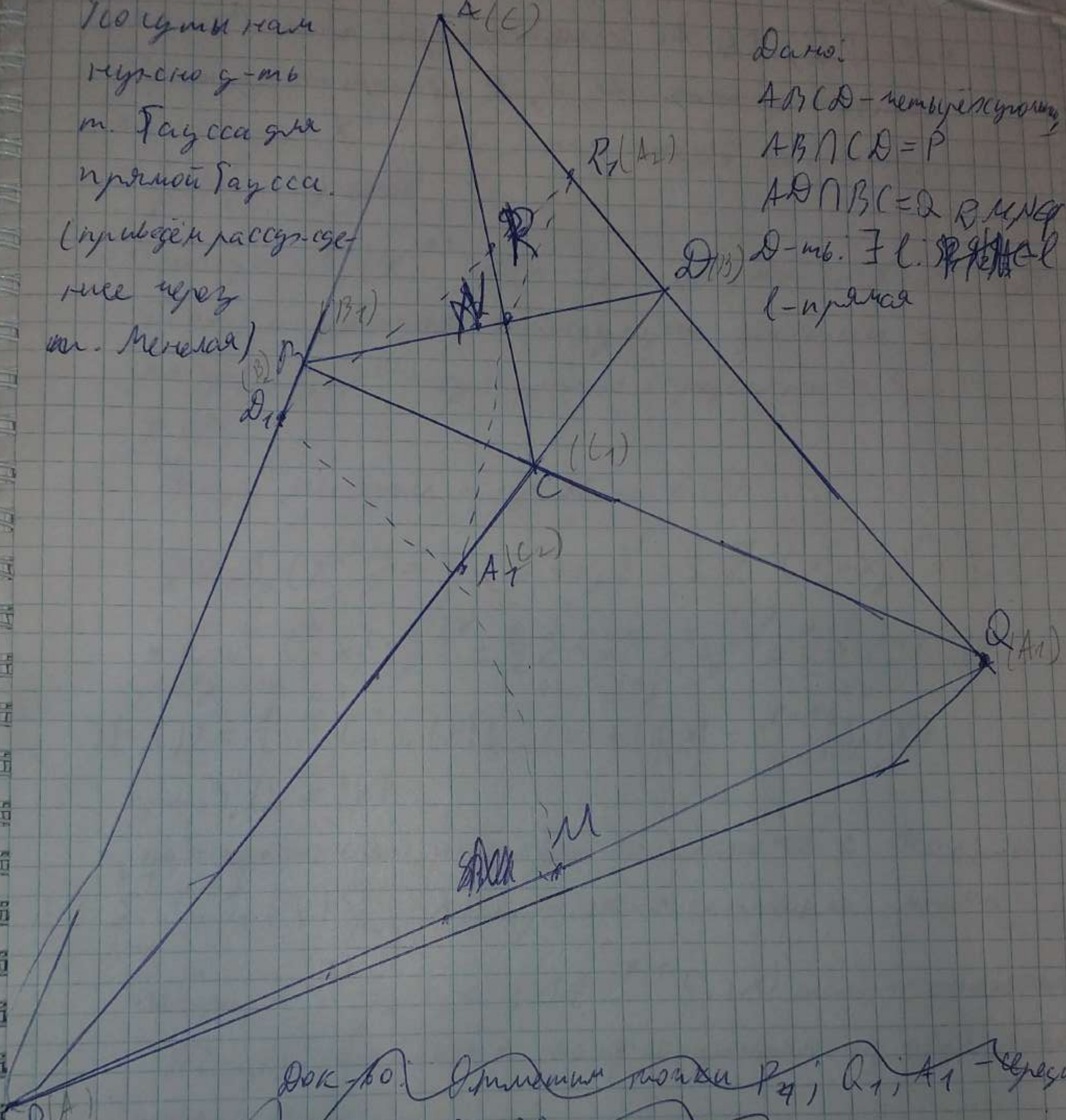
~~Если $9k \leq 54$ — подходит т.к.~~ при $9k=54$ — подходит, т.к. только касается $\alpha+2$

Поэтому $9k_{max}=54 \Rightarrow k_{max}=6$

Ответ: $k_{max}=6$

По сути нам нужно д-ть т. Гаусса для прямой Гаусса. (приведён рассуждение через т. Менелая)

Дано:
$ABCD$ – четырёхугольник,
$AB \cap CD = P$
$AD \cap BC = Q$
$R, M, N \in$
Д-ть: $\exists\, l : R, N, M \in l$
l – прямая



~~Док-во. Отметим точки P_1; Q_1; A_1 – середины сторон AQ; AP; PQ соответственно.~~

$S_1 \in$

Док-во: Отметим точки R_1; A_1, D_1 – середины сторон AD, PD, AP. Т.к. R, N, M лежат на прямых R_1D_1, R_1A_1, D_1A_1 соответственно. Тогда воспользовавшись теоремой о пропорциональных отрезках

$\frac{\overrightarrow{R_1R}}{\overrightarrow{RD_1}} = \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{CP}}$, $\frac{\overrightarrow{D_1M}}{\overrightarrow{MA_1}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QD}}$, $\frac{\overrightarrow{A_1N}}{\overrightarrow{NR_1}} = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{BA}}$ почленным перемножением

имеем: $\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{BA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QD}} \cdot \frac{\overrightarrow{D\cdot A_1}}{\overrightarrow{CP}} = \frac{\overrightarrow{A_1N}}{\overrightarrow{NR_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{R_1R}}{\overrightarrow{RD_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{D_1M}}{\overrightarrow{MA_1}}$

т.к. PQ, BD, AC коллинеарны, то по т. Менелая левая часть $=1 \Rightarrow M, N, R$ лежат на 1 прямой

N 5

Для начала заметим, что $0 < \sqrt{3} - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (\sqrt{3}-1)^{2023} < 1$

Рассмотрим выражение $(\sqrt{3}+1)^{2023} - (\sqrt{3}-1)^{2023} =$

$= (\sqrt{3})^{2023} + C_{2023}^{1} \sqrt{3}^{2022} + \ldots + 1 - \sqrt{3}^{2023} + C_{2023}^{1} \sqrt{3}^{2022} - \ldots$

$\ldots + 1 = 2 \sum\limits_{i=0}^{1011} C_{2023}^{1+2i} 3^{1011-i} \in \mathbb{N} \Rightarrow [(\sqrt{3}+1)^{2023}] =$

$= (\sqrt{3}+1)^{2023} - (\sqrt{3}-1)^{2023} = 2 \sum\limits_{i=0}^{1011} C_{2023}^{1+2i} 3^{1011-i}$

$2 \sum\limits_{i=0}^{1011} C_{2023}$

~~Выведем~~ Обобщим наше рассуждение на произвольное k.

Положим, что:

$$\left.\begin{aligned}(\sqrt{3}+1)^{2k+1} &= x_{k} + y_k\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}-1)^{2k} &= x_k - y_k\sqrt{3}\end{aligned}\right\} \quad (\text{т.к. } (\sqrt{3}+1)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^{i} \sqrt{3}^{2k} \quad (\sqrt{3}-1)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i C_{2k}^{i} \sqrt{3}^{2k})$$

В таком случае $x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^{2k+2} =$

$= (x_n + y_n\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3}) = 4x_n + 6y_n + (2x_n + 4y_n)\sqrt{3}$

получаем рекуррентное соотношение для x_n y_n из кольца $\mathbb{Z}$:

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1} &= 4x_n + 6y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 4y_n\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x_{n+2} &= 4x_{n+1} + 6y_{n+1} \\ y_{n+2} &= 2x_{n+1} + 4y_{n+1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}&x_{n+2} = 4x_{n+1} + 12x_n + 24y_n = \\ &= 8x_{n+1} - 4x_n \\ &y_{n+2} = 8y_{n+1} - 4y_n\end{aligned}\right.$$

Тогда $(\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1} =$

$= (x_k + y_k\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) - (x_k - y_k\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) =$

$= (x_k + x_k\sqrt{3} + y_k\sqrt{3} + 3y_k) - (x_k\sqrt{3} - x_k - 3y_k + y_k\sqrt{3}) =$

$= 2x_k + 6y_k$

Теперь докажем, что $\mathrm{ord}_2(2x_k + 6y_k) = k+1$

n=3 По индукции:

База: $n=0$: $\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1=2$ орд$_2(2)=1$

$x_0=1$ $y_0=0$.

$n=1$:

$(\sqrt{3}+1)^2=4+2\sqrt{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=4 \\ y_1=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ орд$_2(4)=2$

~~Теперь~~

Теперь докажем, что $n, n+1 \to n+2$

$2(x_{n+2}+3y_{n+2})=2(8x_{n+1}-4x_n+24y_{n+1}-72y_n)=$

$=8(2(x_{n+1}+3y_{n+1})-(x_n+3y_n))$

по предпол. индукции $x_{n+1}+3y_{n+1}=a\,2^{n+2}$, ~~иначе~~

$x_n+3y_n=b\,2^{n+1}$ $a\equiv b\equiv 1 \pmod 2$

тогда $8(a\cdot 2^{n+3}-b\,2^{n+1})=2^{n+3}(8a-b)^2$

$\Rightarrow 8a-b\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow$ орд$_2(2(x_{n+2}+3y_{n+2}))=n+3$

В таком случае для $[(1+\sqrt{3})^{2023}]=[(x_{1011}+\sqrt{3}\cdot y_{1011})] \Rightarrow$ орд$_2[(1+\sqrt{3})^{2023}]=1012$

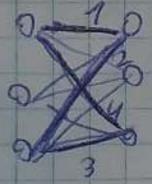
Задача № 6

1) Заметим, что при $n=4$: Г - граф и число рёбер не более 5.

Действительно. Если у нас будет 6 рёбер, то граф $\Gamma = K_4$, а $\Rightarrow \forall V_i \in V \ |V_i| = 3 \Rightarrow$ удаление цикла оставит связность графа

2) Если у нас есть 3 вершины, то в другие число смежных им вершин не более 2.

т.к. при 3 вершинах, получаем, что 6 вершин образуют $K_{3,3}$ (на рис. показан цикл, который можно удалить) Значит в нашем графе запрещён



подграф $K_{3,3}$ и K_4

Однако данное утверждение можно усилить до запрета подграфа $K_{2,3}$, т.е. наш граф характеризуется запретом ~~на~~ графов $K_{2,3}$ и K_4 $\Rightarrow$ это внешнепланарный граф. Число рёбер во внешнепланарном не более, чем $2n-3$. Покажем алгоритм когда достигается данная оценка.

Возьмём граф K_4, удалим из него 1 ребро, теперь к 2 ~~несвязным~~ несмежным вершинам будем добавлять новые. Таким образом при увеличении ~~на~~ вершин на 1 добавляется 2 ребра $\Rightarrow$ в графе на n вершин нас будет $5 + 2(n-4) = 2n-3$

Ответ: $2n-3$

№7

Рассмотрим данную нам конструкцию окружностей и поймём, что все окружности внутри Ω — одинакового радиуса. Кроме того положим r — радиус малой окр $\Rightarrow \frac{R}{r} = 3$, где R — радиус Ω.

обозначим ρ — рад. ось

Пусть $X = OF \cap \rho(\Omega, j)$

$$\left.\begin{array}{l} OX = d_1 \\ FX = d_2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} d_1 - 100 = d_2 - r^2 \\ d_1 - d_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 - d_2 = 100 - r^2 \\ d_1 - d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - r^2 = 1 \Rightarrow d_1 = \frac{101 - r^2}{2}$$

$$d_2 = \frac{99 - r^2}{2}$$

положим φ_x касательная к ω.

Тогда $\varphi_x^2 = d_1^2 - 100 = \frac{R^4 - 202R^2 + 9801}{4}$

Положим $m(X, \varphi_x) \cap OF = K$

~~расск~~ применим инверсию в дальней точке K:

$$\begin{cases} \Omega \to \Omega' \\ j \to j' \end{cases} \quad \frac{d'}{d_1} = \frac{R'}{R} \quad jj' = 1 \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{1}{j^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = j^2 R'$$

получаем $\frac{3}{10} = \frac{FK^2}{OK^2}$; $FK = d_2 + \varphi_x$; $OK = d_1 + \varphi_x$

$r = x$ получаем:

$$\frac{3x}{10} = \frac{99 - x^2 + \sqrt{x^4 - 202x^2 + 9801}}{101 - x^2 + \sqrt{x^4 - 202x^2 + 9801}}$$ решением которого будет

$x = \frac{1}{3}(50 - \sqrt{7609})$ т.е. $r = \frac{1}{3}(50 - \sqrt{7609})$ Ответ: $r = \frac{1}{3}(50 - \sqrt{7609})$

Задача №8

Пусть нам нужно определить набор X по набору $X^{(2)}$ обозначим ~~через~~ $S_p(x_1, x_2, \dots) = \sum_i x_i^p$, ~~\dots~~

① тогда $S_1(X^{(2)}) = (n-1) S_1(X) \Rightarrow S_1(X) = \frac{1}{n-1} S_1(X^{(2)})$

Теперь ~~докажем~~ по индукции докажем, что по набору $X^{(2)}$ однозначно определяются $S_p(X)$, $p \in \mathbb{N}$.

Базу мы уже предъявили в ①

$$S_p(X^{(2)}) = \sum_{i<j} (x_i + x_j)^p = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (x_i + x_j)^p = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i \neq j} \sum_{q=0}^{p} C_p^q x_i^q x_j^{p-q} = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p} C_p^q \sum_{i \neq j} x_i^q x_j^{p-q} = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p} C_p^q (S_q(X) S_{p-q}(X)) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{p-1} C_p^q S_q(X) S_{p-q}(X) + (|X| - 2^{p-1}) S_p(X)$$

при $S_0(X) = |X|$

по предположению индукции все слагаемые в части $\sum_{q=1}^{p-1} C_p^q S_q(X) S_{p-q}(X)$ определяемы степенными суммами набора $X^{(2)}$ $\Rightarrow$ при $|X| \neq 2^{p-1}$ $S_p(X)$ также определено

Теперь обратимся к коэффициентам из обобщённой теоремы Виета.

пусть $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = S_1(X) = \frac{1}{n-1} S_1(X^{(2)})$

$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + \dots$

— — — — —

$\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$

С помощью формулы Ньютона можно последовательно восстановить все σ_i: $n \sigma_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \sigma_{n-i} S_i$

Зная же $б_1(X), б_2(X) \ldots б_n(X)$

мы можем ~~найти~~ построить полином

$P(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X^{n-i} б_i$, положив $б_0 = 1$

$P(X)=0$ - даёт корни, равные искомым числам из набора X.

Теперь построим след. алгоритм.

т.к. ~~все числа~~ $\forall x \in X : x \in \mathbb{N} \Rightarrow$ нам достаточно перебрать конечное (положим до $\max(|б_1|, |б_2| \ldots |б_n|)$) число элементов, которые мы подставляем в $P(X)$.

если $P(X_1)=0 \Rightarrow$ поделим $P(X)$ на $(X-X_1)$ и снова подставим X_1, ~~пока не~~ чтобы определить ~~все~~ кратность корней (т.е. число одинаковых элементов вида $X_1 \in X$)

Данным алгоритмом набор X, при $|X| \neq 2^n, n \in \mathbb{N}$ однозначно восстанавливается.