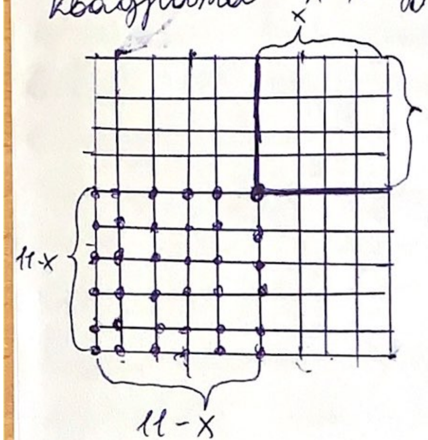
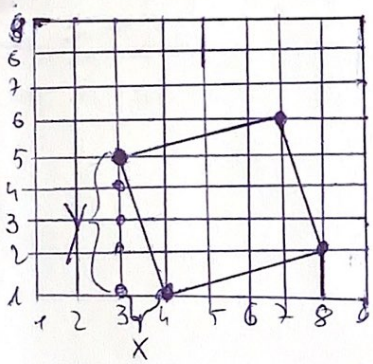
1.

Сначала посчитаем кол-во квадратиков, рёбра которых совпадают линиями сеток. ~~Если квадратик~~ Пусть размер квадрата - $x \cdot x$ узлов. Посмотрим на левый нижний узел квадрата. Он может являться одним из узлов, принадлежащих квадрату размерами $(11-x)\cdot(11-x)$, прилегающему к левому нижнему узлу главного квадрата. То есть всего таких квадратов $(11-x)^2$. Т.к. $x \in [2;10]$, то $\sum_{x=2}^{10}(11-x)^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2$.



Теперь посчитаем кол-во квадратов, стороны которых не совпадают с линиями сетки. Рассмотрим у какого-то такого квадрата ребро, соединяющее нижний его узел и правый его узел. Это ребро является гипотенузой в прямоугольном треугольнике, в котором катеты совпадают с линиями сетки. Пусть на этих катетах соответственно x и y узлов сетки.



Пронумеруем строки и столбцы из узлов сетки от 1 до 10. Тогда, если разница номеров строчек +1 ~~верхнего-нижнего~~ верхнего-нижнего узла ≥ 11, то в квадрат 9×9 он не влезет. (Аналогично по столбцам). Заметим, что эта величина равна $x+y-1$. То есть $x+y-1<11$; $x+y\leq 11$. Так же, т.к. $x>1$ и $y>1$, то $4\leq x+y\leq 11$ (если $x=1$, то ребро строго горизонтальное, ?).

Пусть $x+y=S$. Нарисуем такой квадрат за прилегающий к левой и нижней стенке. Тогда этот квадрат можем подвинуть на любое из значений $[0;\underbrace{10-(S-1)}_{11-S}]$ узлов вверх. Аналогично, на $[0;10-(S-1)]$ узлов вправо. Значит, всего вариантов расположения квадрата $(10-(S-1)-0+1)^2=(12-S)^2$. Количество вариантов выбрать x и y с фиксированным S - $S-3$: $(x,y)=(2;S-2),(3;S-3),\dots,(S-2;2)$. Значит, кол-во квадратов с суммой S = $(S-3)(12-S)^2$

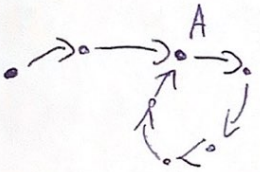
$\sum_{S=4}^{11}(S-3)(12-S)^2 = 8^2+2\cdot7^2+3\cdot6^2+4\cdot5^2+5\cdot4^2+6\cdot3^2+7\cdot2^2+8\cdot1^2$. То есть общая сумма равна $9\cdot1^2+8\cdot2^2+7\cdot3^2+6\cdot4^2+5\cdot5^2+4\cdot6^2+3\cdot7^2+2\cdot8^2+9^2=825$. Ответ: 825.

2.

Ответ: да, встретится.

Сделаем ор. граф, где вершина - 4 подряд идущие цифры последовательности, а ребра проводится от предыдущей четвёрки последовательности к следующей. Так как четвёрок конечное кол-во (10^4), то граф будет являться циклом (возможно с предпериодом). Если предпериода не будет, то четвёрка 2023 встретится ещё раз. Докажем, что предпериода не будет:

Если есть предпериод, то есть вершина, в которую входят два ребра от двух разных вершин (вершина A на рисунке). Докажем, что такого не может быть.



Если такое есть то какая-то четвёрка abcd может следовать за двумя разными четвёрками xabc и yabc. Но тогда

$x+a+b+c \underset{10}{\equiv} d \underset{10}{\equiv} y+a+b+c \Rightarrow x+a+b+c \underset{10}{\equiv} y+a+b+c \Rightarrow x \underset{10}{\equiv} y$, а т.к. $x, y < 10$, то $x=y$. Тогда, каждая четвёрка может следовать за ≤ 1 предыдущей четвёрки. Тогда предпериода нет $\Rightarrow$ четвёрка 2023 входит в цикл и встретится ещё раз.

ч.т.д.

3.

По формуле Брахмагупты $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-\frac{1}{4}abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$, где S – площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c, d и $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ противоположными углами α и β. По условию четырёхугольник описанный $\Longrightarrow (p-a)(p-b)(p-d)(p-c)=abcd \Rightarrow S=\sqrt{abcd-\frac{1}{4}abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$. Т.к. по условию $S=\sqrt{abcd}$, то $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$, откуда следует, что

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ\\ \frac{\alpha+\beta}{2}=270^\circ\end{array}\right.$$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=270^\circ$: такого не может быть, т.к. тогда сумма углов четырёхугольника >360.

$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ \Longrightarrow \alpha+\beta=180^\circ. \Rightarrow$ четырёхугольник вписанный.

ч.т.д.

4.

Предположим противное: пусть такие числа нашлись.
Возьмём наименьшее из них и будем к нему 21 раз при-
бавлять по 1. Очевидно, что будет ≥ 2 перехода через V
десяток. Заметим, что если у нечётного числа сумма
цифр чётная, то это не число харшад. Рассмотрим
число харшад с ≥ 1 девяткой в последних разрядов (перед
переходом через десяток). У него сумма цифр нечётная.
$\dots\underbrace{999\dots99}_{n}$ Без перехода через десяток сумма цифр
увеличивается на 1 (при +1) $\Rightarrow$ у следущего числа сумма цифр
должна быть чётной. Все эти n девяток преобразуются
в 000…00 при переходе, а к оставшейся части +1. Т.к.
чётность должна поменяться, то девяток должно быть
чётное кол-во. Но у двух соседних переходов через
десяток не может быть $\geq$ двух девяток в конце, т.к.
тогда разница между числами в переходах ≥ 100, а $100 > 10$.
Значит не может быть 22 подряд идущих чисел
харшад. ч.т.д.

V: Двух переходов через десяток, где после перехода
есть ≥ 1 число (тогда важно, чтобы у числа после перехода
через десяток было чётная сумма цифр, чтобы у последую-
щего нечётного число была нечётная сумма цифр.)
Докажем это. Если наименьшее из чисел заканчивается
не на 0, то можем взять также все числа, меньше
наименьшего до ближайшего числа, оканчивающего на 0.
Затем вычтем из всех чисел наименьшее, при этом ничего
не изменится. У нас получилась последовательность подряд
идущих ≥ 22 чисел, начинающихся с 0. Тогда в ней
есть все числа от 0 до 21 включительно. Тогда числа
9, 10, 11 и 19, 20, 21 и образуют 2 нужных перехода через де-
сяток. ч.т.д.

5.

Ответ: $k=6$.

Докажем, что при $k=6$ неравенство корректно:

Заметим, что если нер-во верно для x, y, z, то верно и для $-x, -y, -z$ ($6(x^3+y^3+z^3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3 \Leftrightarrow 6(-x^3-y^3-z^3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3$) $\Rightarrow$ Без ограничения общности можно считать, что среди x, y, z есть ≥ 2 неотрицательных. Пусть x, y. Тогда $z=-x-y$.

$$6(x^3+y^3+z^3) \le (x^2+y^2+z^2)^3$$

$$\Updownarrow$$

$$6(x^3+y^3-(x+y)^3)^2 \le (x^2+y^2+(x+y)^2)^3$$

$$6(x^3+y^3-x^3-y^3-3x^2y-3yx^2)^2 \le (2x^2+2y^2+2xy)^3$$

$$54(x^2y+y^2x)^2 \le 8(x^2+y^2+xy)^3$$

$$27(x^2y+xy^2)^2 \le 4(x^2+y^2+xy)^3$$

$$27(x^4y^2+x^2y^4+2x^3y^3) \le 4(x^6+y^6+x^3y^3+6x^3y^3+3x^4y^2+3x^2y^4+3x^5y+3x^4y^2+3xy^5+3x^2y^4)$$

$$27x^4y^2+27x^2y^4+54x^3y^3 \le 4x^6+4y^6+28x^3y^3+24x^4y^2+24x^2y^4+12x^5y+12xy^5$$

$\Updownarrow$ по нер-ву Коши $4x^6+4y^6 \geq 8x^3y^3$

$$3x^4y^2+3x^2y^4+46x^3y^3 \le 28x^3y^3+12x^5y+12xy^5$$

$3x^4y^2+3x^2y^4+18x^3y^3 \le 12x^5y+12xy^5$ (если x или $y=0$, то нер-во очевидно, иначе можем разделить на x, y, т.к. $x, y>0$).

$$3x^3y+3xy^3+18x^2y^2 \le 12x^4+12y^4$$

$$x^3y+xy^3+6x^2y^2 \le 4x^4+4y^4$$

$\Updownarrow$ по нер-ву Коши $3x^4+3y^4 \geq 6x^2y^2$

$x^4+y^4 \geq x^3y+xy^3$, а это транснеравенство для чисел x, y, x^3, y^3 (если $x \geq y$, то и $x^3 \geq y^3$) $\Rightarrow$ транснеравенство корректно. ч.т.д.

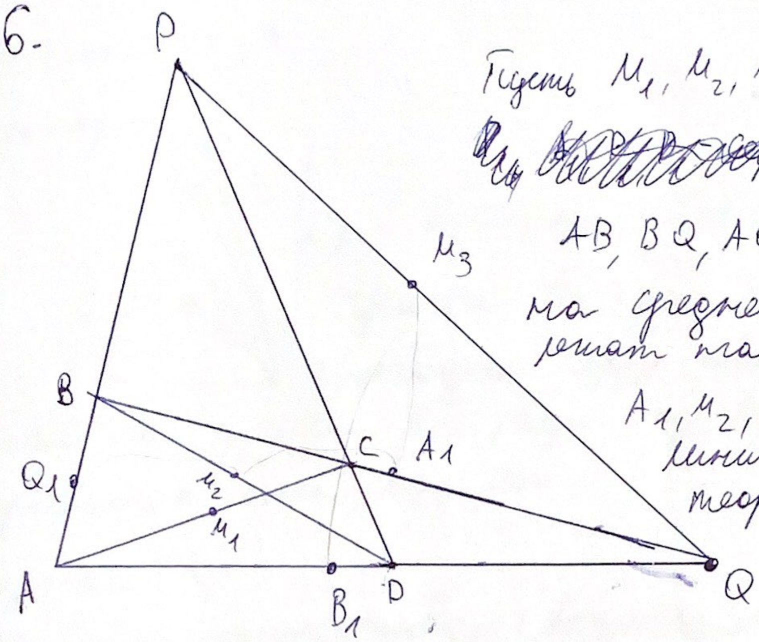
Докажем, что $k=6$ - наибольшее:

$x=1$; $y=1$; $z=-2$.

$(x^3+y^3+z^3)^2=36$; $(x^2+y^2+z^2)^3=216 \Rightarrow$ При $k>6$:

$k\cdot(x^3+y^3+z^3)^2 > (x^2+y^2+z^2)^3$. ч.т.д.

6.



Пусть M_1, M_2, M_3 – середины AC, BD, PQ, Q_1, A_1, B_1 – середины AB, BQ, AQ. Тогда B_1, A_1, M_3 лежат на средней линии $\triangle AQP$, B_1, M_1, Q_1 лежат на средней линии $\triangle ABQ$, A_1, M_2, Q_1 также на средней линии $\triangle ABQ$. Запишем теорему Менелая для $\triangle ABQ$ и прямой PD:

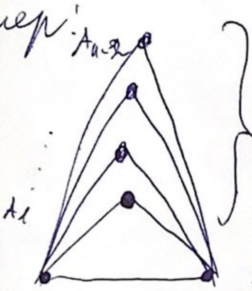
$$\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BC}{CQ}\cdot\frac{QD}{DA}=1;\quad \frac{AP}{BP}=\frac{B_1M_3}{M_3A_1},\ \frac{BC}{CQ}=\frac{Q_1M_1}{M_1B_1},\ \frac{QD}{DA}=\frac{A_1M_2}{M_2Q_1}\Rightarrow$$

$$\frac{B_1M_3}{M_3A_1}\cdot\frac{Q_1M_1}{M_1B_1}\cdot\frac{A_1M_2}{M_2Q_1}=1,$$ что является теоремой Менелая для $\triangle A_1B_1Q_1$ и точек M_1, M_2, M_3. $\Rightarrow$ $M_1; M_2; M_3$ лежат на одной прямой. ч.т.д.

7.

Ответ: $2n-3$.

Пример:



$n-2$ вершины. Очевидно, что в этом графе $2n-3$ ребра. Также, любой цикл проходит через какую-то A_i. Удалив этот цикл, мы удалим все рёбра из вершины A_i $\Rightarrow$ граф перестанет быть связным.

Оценка:

~~Выделим какую-нибудь вершину A и всех смежных~~

~~Выделим Возьмём вершину A, которая является вершиной в каком-то остове (такие будут), выделим все из всех смежных с ней.~~

~~Возь~~ Выделим какую-нибудь вершину A. ~~А~~ Будем ~~удалять~~ получать остов графа так: находим цикл и удаляем в нём любое ребро, не проходящее через A (очевидно в любом цикле такое найдётся); (так же очевидно, что связность не нарушается и т.к. циклов конечное кол-во, то в конце концов мы получим остов). Тогда мы получим остов, где есть все рёбра из A. Если при удалении ~~всего остова~~ всех рёбер из A этого остова найдётся цикл, то если бы мы удалили этот цикл, то связность не нарушилась бы. Значит, оставшийся граф - граф без циклов на $n-1$ вершинах (вершина A в нём не участвует, т.к. все рёбра из неё мы удалили). Значит, в оставшемся графе $\leq n-2$ ребра и $n-1$ в изначальном остове $\Rightarrow$ Всего рёбер $\leq 2n-3$. ч.т.д.

8.

Ответ: $m = n+1$.

Пример:

Если $m < n$, то не удастся выбрать n строк. Если $m = n$, то в каждой строке есть клетка, участвующая в одноцветной диагонали. Покрасим одну строку в белый, а другую в чёрный. Тогда одноцветная диагональ должна быть одновременно и чёрной и белой. ?.