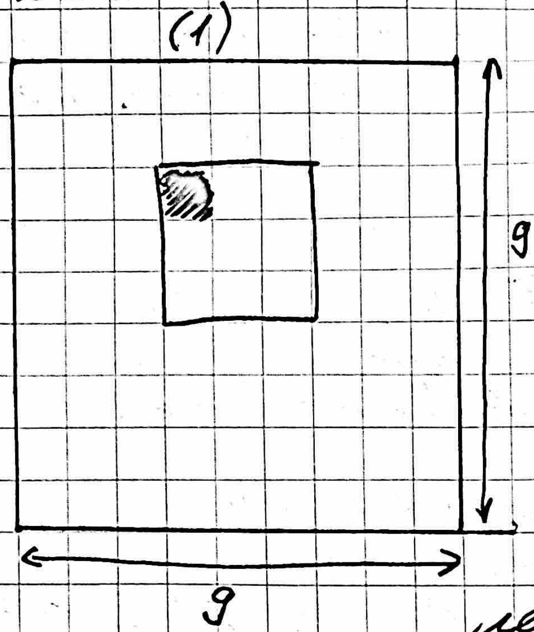
№1



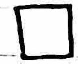
Найдём кол-во квадратов, стороны которых параллельны сторонам данного квадрата 9×9 и имеют длину равную целому кол-ву клеток.

Для этого выделим в квадрате каждого возможного размера (1×1; 2×2 ... 9×9) верхнюю левую клетку и определим те клетки квадрата 9×9, в которых она может быть расположена, например, для размера 1×1 таких клеток $9\cdot9=81$ (все клетки квадрата 9×9), а для размера 2×2 таких клеток 8×8, т.к. мы исключаем нижнюю строку и правый столбец (в них не может находиться верхняя левая клетка квадрата 2×2).

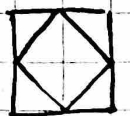
При этом каждая такая клетка соответствует одному квадрату заданного размера, например на рисунке (1) закрашенная клетка соответствует только одному квадрату 3×3. Таким образом получим кол-во квадратов каждого из размеров:

(I) $1\times1 \Rightarrow 81$; $2\times2 \Rightarrow 64$; $3\times3 \Rightarrow 49$; $4\times4 \Rightarrow 36$;
$5\times5 \Rightarrow 25$; $6\times6 \Rightarrow 16$; $7\times7 \Rightarrow 9$; $8\times8 \Rightarrow 4$; $9\times9 \Rightarrow 1$.

Заметим, что любая из точек, являющаяся вершиной клетки квадрата 9×9, принадлежит какой-то стороне посчитанных ранее квадратов, то есть любой квадрат, стороны которого не параллельны сторонам квадрата 9×9 вписан в один из учтённых под (I) квадратов.

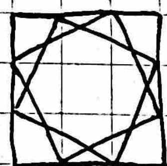
Рассмотрим квадрат 1×1  в него нельзя вписать квадрат так, чтобы его вершины совпадали с отмеченными точками.

Рассмотрим квадрат 2×2:



в него можно вписать только один квадрат со стороной $\sqrt{2}$, при этом кол-во кол-во таких квадратов будет совпадать с кол-вом квадратиков 2×2, то есть их 64.

Для 3×3: можно вписать 2 квадрата



их кол-во: 49·2 т.к. вписано 2 квадрата

кол-во вписанных квадратов равно кол-ву „мест" где на стороне может быть вершина вписанного квадрата, то есть кол-ву отмеченных точек, лежащих между вершинами рассматриваемого квадрата.

Тогда для 4×4: 3·36
5×5: 4·25
6×6: 5·16
7×7: 6·9
8×8: 7·4
9·9: 8·1

~~Таким образом мы учли все квадраты, т.к.~~

Общее кол-во квадратов:

$$81+64+64+49+49\cdot 2+36+36\cdot 3+25+25\cdot 4+$$
$$+16+16\cdot 5+9+9\cdot 6+4+7\cdot 4+1+8\cdot 1=$$
$$=81+2\cdot 64+3\cdot 49+4\cdot 36+5\cdot 25+6\cdot 16+7\cdot 9+8\cdot 4+9\cdot 1=$$
$$=160+90+240+210+125=825$$

Ответ: 825.

№ 2

Заметим, что кол-во различных четвёрок цифр равно: 10^4, т.к. на каждом из четырёх „мест" может стоять одна из 10 цифр.

То есть, если Ваня продлит свою последовательность, начинающуюся с 2, 0, 2, 3, на более чем 10^4 цифр (то есть в последовательности окажется более 10^4 четверок стоящих рядом цифр), то, исходя из принципа Дирихле, найдётся хотя бы одна последовательность цифр a, в, c, d, встречающаяся дважды.

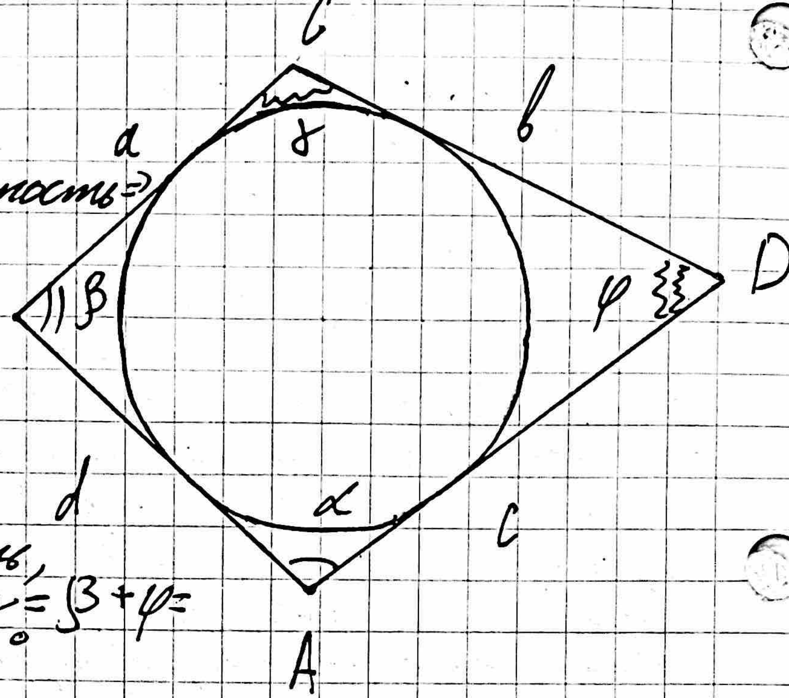
Получим последовательность, имеющую вид:

$$2, 0, 2, 3 \ldots \overbrace{a, b, c, d}^{1}, \ldots a, \overbrace{b, c, d}^{2}$$

Заметим, что 4 подряд идущие цифры определяют всю последовательность цифр идущих до и после них, то есть в промежутке от 1 a, в, c, d и до 2 a, в, c, d есть та же последовательность цифр как от 2, 0, 2, 3 до 1 a, в, c, d $\Rightarrow$ 2, 0, 2, 3 точно встретится подряд в промежутке 1 a, в, c, d ... 2 a, в, c, d.

Ответ: да, встретится.

№3



т.к. в $ABCD$ можно вписать окружность $\Rightarrow$

$\Rightarrow a + c = b + d$ (1)

$S = \sqrt{abcd}$ (2) (по условию)

Д-ть, что можно описать окружность, то есть, что: $\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180^\circ$

Воспользуемся формулой Брахмагупты для произвольных четырёхугольников:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\theta}$$

(θ – полусумма противолежащих углов, p – полупериметр)

$$S = \sqrt{\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{b+c+a-d}{2}\right)\left(\frac{a+d+b-c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+d+c-b}{2}\right) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

Учитывая (1) и (2):

$$\sqrt{abcd} = \sqrt{\left(\frac{a+2c-a}{2}\right)\left(\frac{2b+d-d}{2}\right)\left(\frac{a+c-c}{2}\right)\left(\frac{2d+b-b}{2}\right) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} = \sqrt{abcd\left(1-\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)} =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sqrt{abcd} \Rightarrow \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = 1$$

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha+\gamma = 180^\circ$$

ч.т.д.

№4

Заметим, что все множества натуральных чисел вида:

$$\{10n;\ 10n+1;\ 10n+2;\ \ldots\ 10n+9\}$$

где n — натуральное число или ноль можно разделить на два вида.
(для $n=0$ множество имеет вид $\{10n+1;\ \ldots;\ 10n+9\}$)

I нечётные числа имеют чётную сумму цифр, например: $(n=32)$

$$320;\ \underbrace{321}_{3+2+1=6};\ 322;\ \underbrace{323}_{3+2+3=8};\ \ldots\ \underbrace{329}_{3+2+9=14}$$

в таких множествах не может быть двух или более нарцисс чисел, идущих подряд, так как нечётные числа не делятся на чётные

II нечётные числа имеют нечётную сумму цифр: $(n=33)$

$$330;\ \underbrace{331}_{3+3+1=7};\ 332;\ \underbrace{333}_{3+3+3=9};\ \ldots\ \underbrace{339}_{3+3+9=15}$$

Заметим, что в натуральном ряде чисел такие множества чередуются, за исключением случаев перехода через десяток, то есть наибольшее кол-во нарцисс чисел может быть в случае двух подряд идущих множеств вида II.

пример:

$$\left(\underbrace{380\ldots389}_{\text{I}}\ \underbrace{390\ldots399}_{\text{II}}\ \underbrace{400\ldots499}_{\text{II}}\ \underbrace{500\ldots599}_{\text{I}}\right)$$

предположим, что есть 2 множества вида II, идущие подряд, в которых все числа являются нарцисс.

Заметим, что число идущее перед этими множествами является нечётным и принадлежит множеству вида I, то есть оно не может быть нарциад, а число идущее после этих множеств чётное и принадлежит множеству I. Предположим, оно является нарциад, но тогда число идущее после него нечётно и принадлежит множеству вида I, то есть не может быть нарциад.

Таким образом, не может быть более 21 числа вида нарциад идущих подряд.

ч.т.д.

№5

$$k(x^3+y^3+z^3)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)^3$$

$$k \leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2} \quad \left((x^3+y^3+z^3)^2 \geq 0\right)$$

для случая $x^3+y^3+z^3=0$: k – любое число

$x+y+z=0$ (по условию)

$$z=-(x+y) \Rightarrow \frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2}=$$

$$=\frac{(2x^2+2y^2+2xy)^3}{(-3x^2y-3xy^2)^2}=\frac{8}{9}\cdot\frac{(x^2+y^2+xy)^3}{(xy)^2(x+y)^2}=$$

$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{((x+y)^2-xy)^3}{(xy)^2(x+y)^2}=\frac{8}{9}\cdot\frac{(b-a)^3}{9a^2b}= \quad \boxed{\begin{matrix} xy=a \\ (x+y)^2=b \end{matrix}}$$

$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{b^3-3b^2a+3ba^2-a^3}{a^2b}=\frac{8}{9}\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{b}{a}+3-\frac{a}{b}\right)$$

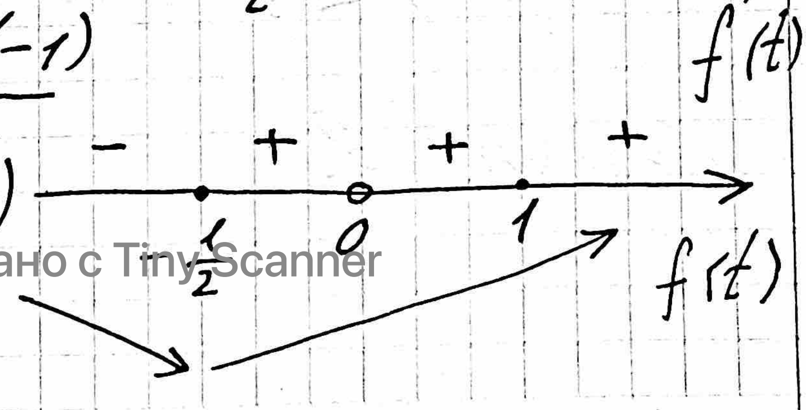
$$\frac{b}{a}=t \Rightarrow \frac{8}{9}\left(t^2-3t+3-\frac{1}{t}\right)$$

$$f(t)=t^2-3t+3-\frac{1}{t}$$

$$f'(t)=2t-3-\frac{1}{t^2}=\frac{2t^3-3t^2+1}{t^2}=$$

$$=\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)(t-1)}{t^2}$$

(1)



найдём ОДЗ для t:

$$t = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x^2+2xy+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}$$

т.к. $x+y+z=0 \Rightarrow$ 2 числа из x, y, z являются положительными, а одно отрицательным или наоборот.

(для $\underbrace{x=y=z}_{=0}$ k - любое число)

без ограничения общности рассмотрим два случая:

$x>0$ и $y>0$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ ← из неравенства КБШ

$\Downarrow$

$t \geq 4$

$x<0$ и $y<0$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$\Downarrow$

$t \geq 4$

$\Downarrow$

$t \in [4; +\infty)$. (2)

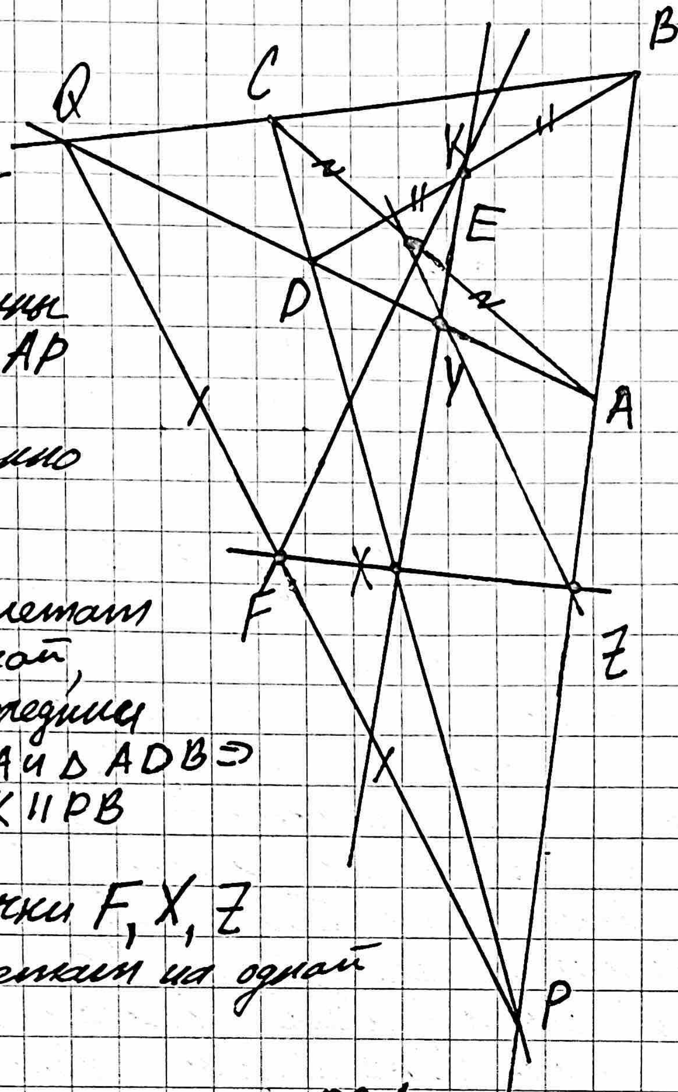
Тогда из (1) и (2) функция имеет минимальное значение, при $t=4$: $\frac{8}{9}\left(4^2 - 3\cdot 4 + 3 - \frac{1}{4}\right) =$

$= 6 \Rightarrow k \leq 6 \Rightarrow$ наибольшее $k=6$.

Ответ: 6.

№6

Д-ть:
т. K, E, F – лежат на одной прямой



Отметим середины сторон AD, DP и AP как т. Y, X, Z соответственно

Заметим, что точки X, Y, K лежат на одной прямой, т.к. XY и YK средние линии в $\triangle PDA$ и $\triangle ADB$ ⇒ ⇒ XY ∥ PB и YK ∥ PB

Аналогично, точки F, X, Z и Z, Y, E лежат на одной прямой.

Теорема Менелая для $\triangle PDA$ и секущей BC:

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1$$

Заметим, что $\frac{AB}{BP}=\frac{YK}{KX}$, т.к. $\triangle PDB \sim \triangle XPK$, (т.к. $\angle XDK$ – общий, а $\angle DKX = \angle DBP$ как соответственные углы, при KX ∥ BP и сек. BK)

а DA – общая медиана.

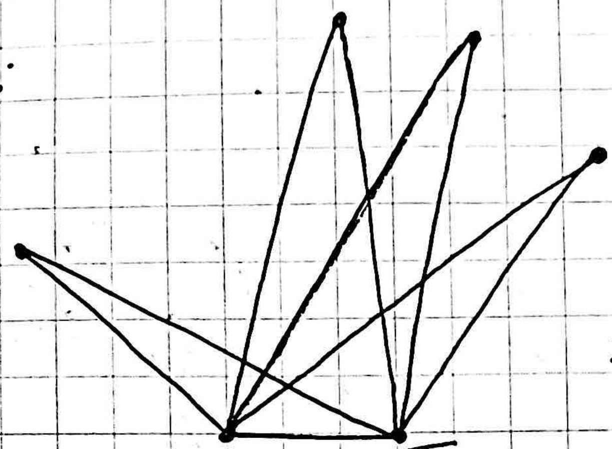
Аналогично, $\frac{PC}{CD}=\frac{ZE}{EY}$, $\frac{DQ}{QA}=\frac{XF}{FZ}$ $\Big|$ ⇒ $\frac{XF}{FZ}\cdot\frac{ZE}{EY}\cdot\frac{YK}{KX}=1$

Таким образом, выполнена теорема Менелая для $\triangle XYZ$ и секущей, которой принадлежат точки K, E, F, т.е. они лежат на одной прямой

ч.т.д.

№ 7

пример:



для $n = 6$

$2n - 3 = 9$

наибольшее кол-во рёбер:

$$2(n-2)+1 = 2n-4+1 = 2n-3$$

Заметим, что в любой цикл входит три или более вершины. Убирая все ребра из цикла мы убираем по два ребра принадлежащих вершине, входящей в цикл, то есть если в нашем графе есть три или более вершин из которых выходит более двух рёбер, то найдётся такой цикл, после удаления рёбер которого, граф останется связным ⇒

⇒ максимальное кол-во ребер будет в случае, когда из двух вершин будет выходить по $n-1$ рёбер, а из остальных по два ребра ⇒ наибольшее кол-во рёбер:

$$\frac{2(n-2)+n-1+n-1}{2} =$$

т.к. каждое ребро учтено дважды

$$= n-2+n-1 = 2n-3$$

Ответ: $2n-3$.

№8

Пусть (без ограничения общности) главная диагональ будет чёрной.

Среди $2^{n-1}+1$ строк точно найдется хотя бы одна строка у которой самая левая клетка чёрная (т.к. 2^{n-1} - кол-во вариантов с самой левой клеткой белого цвета). Предположим, что среди остальных 2^{n-1} строк не нашлось ни одной строки, у которой вторая слева клетка чёрная $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти 2^{n-1} строки являются всеми вариантами раскраски, при которой вторая клетка белая (по условию нет строк раскрашенных одинаково) $\Rightarrow$ среди них есть минимум одна строка с первой слева чёрной клеткой, а в выбранной ранее строке раскрашены и первая и вторая клетки $\Rightarrow$

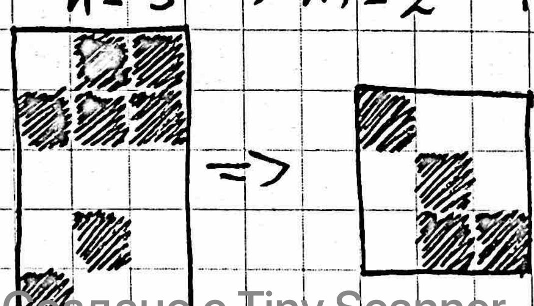
$\Rightarrow$ мы нашли две несовпадающие строки с первой и второй чёрными клетками.

Аналогично, можно найти все остальные „хорошие" строки для любого n.

$2^{n-1}+1$ является минимальным т.к. есть „худший случай" при котором не найдётся ни одной строки с первой чёрной клеткой при количестве 2^{n-1} или меньше.

пример: $n=3 \Rightarrow m=2^{3-1}+1=5$

$m=5$



Ответ: $2^{n-1}+1$.