№1.

Предположим, что утверждение не верно, то есть все выражения больше $\frac{1}{4}$

$a + c - 4b^2 > \frac{1}{4}$

$a + b - 4c^2 > \frac{1}{4}$

$b + c - 4a^2 > \frac{1}{4}$

Выполним сложение неравенств

$2(a+b+c) - 4(a^2+b^2+c^2) > \frac{3}{4}$

Выполним преобразования.

$0 > \frac{3}{4} - 2a + 4a^2 - 2b + 4b^2 - 2c + 4c^2$

$0 > 3 - 8a + 16a^2 - 8b + 16b^2 - 8c + 16c^2$

$16a^2 - 8a + 1 + 16b^2 - 8b + 1 + 16c^2 - 8c + 1 < 0$

Сворачиваем по формуле квадрата разности.

$(4a-1)^2 + (4b-1)^2 + (4c-1)^2 < 0$

Противоречие, тк сумма квадратов не может быть меньше 0. => наше предположение не верно и хотя бы одно выражение не больше $\frac{1}{4}$

Ответ: Доказано.

№2

НОД$(n, 2024) = 1 \Rightarrow n$ не имеет общих множителей с 2024

, а при разложении на множители $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

Всего 2023 числа. Вместо того, чтобы находить числа, у которых нет делителей с 2024, мы просто из всех чисел вычтем те, у кого есть общие делители с 2023.

1. На 2 делятся $2024 : 2 - 1 =$ 1011 чисел

2. На 11 делятся $2024 : 11 - 1 =$ 183 числа. НО!!!

Из них четных (уже посчитанных) — 91 число $(184/2 - 1)$

3. На 23 делятся $2024/23 - 1 =$ 87 чисел

Из них четных $(88/2 - 1)$ — 43 числа

И делятся на 11 $(88/11 - 1)$ - 7 чисел, из них четных 3. (их уже вычли)

И получаем: $2023 - ((1011) + (183 - 91) + (87 - 43 - 7 + 3)) = 880$

Таким образом, мы получим все числа из отрезка $[1; 2023]$, которые не имеют общих делителей с 2024 кроме 1. Всего чисел 2023 $\Rightarrow$ вероятность того, что НОД$(n, 2024) = 1$ равна $\frac{880}{2023}$

Ответ: $\frac{880}{2023}$.

№3

Разделим все квадраты на 2 типа правильные (которые идут по линиям сетки (или же по клеткам) и неправильные те, стороны которых являются диагоналями прямоугольников:

1. Сначала посчитаем правильные:

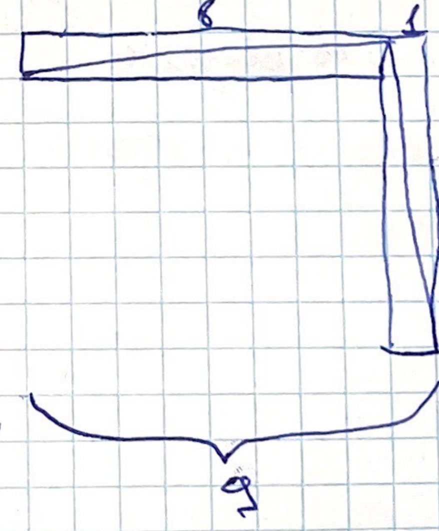
со ст. 1: – 81 квадрат
со ст. 2: – 64 кв.
со ст. 3: – 49 кв.
со ст. 4: – 36 кв.
со ст. 5: – 25 кв.
со ст. 6: – 16 кв.
со ст. 7: – 8 кв.
со ст. 8: – 4 кв.
со ст. 9: – 1 кв.

2. Теперь неправильные:

обозначать их мы будем соотношениями сторон прямоугольника по клеточкам

1 : 1 64 кв.
1 : 2 49 кв.
1 : 3 36 кв.
1 : 4 25 кв.
1 : 5 16 кв.
1 : 6 9 кв.
1 : 7 4 кв.
1 : 8 1 кв.
1 : 9 нет кв.

3 Теперь заметим, что сумма 2 сторон пр не может быть больше 9 тк он не влезет Пример 1:8



И так будет всё время

4. Считаем дальше

2:1	49 кв.	3:1	36 кв.	4:1	25 кв.	5:1	16 кв.
2:2	36 кв.	3:2	25 кв.	4:2	16 кв.	5:2	9 кв.
2:3	25 кв.	3:3	16 кв	4:3	9 кв.	5:3	4 кв.
2:4	16 кв.	3:4	9 кв	4:4	4 кв.	5:4	1 кв.
2:5	9 кв.	3:5	4 кв	4:5	1 кв.		
2:6	4 кв.	3:6	1 кв.	4+5=9			
2:7	1 кв.	3+6=9					

всё, тк 2+7=9.

6:1	9 кв.	7:1	4 кв.	8:1	1 кв.
6:2	4 кв.	7:2	1 кв.		
6:3	1 кв.				

Теперь всё складываем: $81+64\cdot 2+49\cdot 3+36\cdot 4+25\cdot 5+$
$+16\cdot 6+9\cdot 7+4\cdot 8+1\cdot 9=825$

Ответ: 825 квадратов.

№4.

1. Для начала попр...
перед 2,0,2,3 (если ...

2. a, b, c, d, 2023

$\Downarrow$

$a+b+c+d=12/22$

$b+c+d+2=10/$...

$c+d+2+0=$...

$d+2+0+2=$...

$d=9$

$c=1$

$b=8$

$a=4$

$\overbrace{}^{10000}$

1. 2023
2. 2023 $\xleftarrow{I}$ x ...
3. 2023 $\xleftarrow{I}$ x ...

Ответ: да, встрети...

№4.

1. Для начала попробуем определить, какие числа стоят перед 2,0,2,3 (если они появятся) Назовём их a, в, c, d.

2. a, в, c, d, 2023

$\Downarrow$

$a+b+c+d = 12/22/32$

$b+c+d+2 = 10/20$

$c+d+2+0 = 12$

$d+2+0+2 = 13$

$\Downarrow$

$d=9$

$\Downarrow$

$c=1$

$\Downarrow$

$b=8$

$\Downarrow$

$a=4$

3. Значит, мы можем точно по 4ке чисел определить её „предшественников". 4 чисел ограниченное кол-во т.е. не больше 10000. Допустим мы выписали 10000 четверок и какая-то 4ка X — повторилась. Но, тк мы точно можем восстановить путь до какой-то предыдущей 4ки, то значит найдем и 2ую 2023.

1. $\overbrace{2023 \quad\quad\quad}^{10000}$.

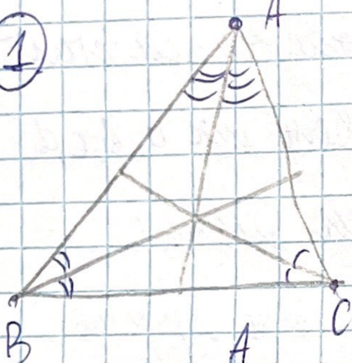
2. $2023 \xleftarrow{I} X \ldots X$ — I — путь.

3. $\underline{\underline{2023}} \xleftarrow{I} X \ldots \underline{\underline{2023}} \xleftarrow{I} X$

Ответ: да, встретится.

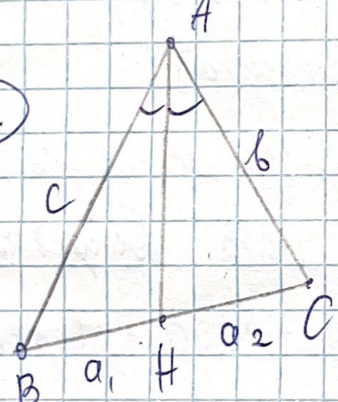
№5

(1)



Каждая бис. делит тр на 2 тр половине.

(2.)



1. Назовем отрезки

2. Мы знаем, что тк AH - бис, то $\frac{c}{a_1} = \frac{b}{a_2}$.

Допустим, что $\frac{c}{a_1} = \frac{b}{a_2} = k$

$\Downarrow$

$c = a_1 k \quad b = a_2 k$

P_Δ равны $\Rightarrow a_1 + \cancel{AH} + c = a_2 + \cancel{AH} + b$

$a_1 + a_1 k = a_2 + a_2 k$

$a_1 \cancel{(1+k)} = a_2 \cancel{(1+k)}$

$\Downarrow$

$a_1 = a_2$

$\Downarrow$

$b = c$

$\Downarrow$

ΔABC - р/б

(3) Повторяя данные действия на других углах, получим, что тр. правильный (р/ст.) (Т.к у каждого угла р/б)

№6

Всего в квадрате 100 на 100 10000 клеток.

Сумма всех цифр равна 5000, и она чётна.

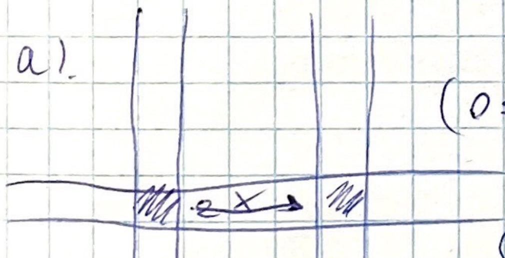
Следовательно, чтобы получить 2 нечетных столбца/строки надо получить хотя бы 1.

Как будут заполнены первые 9998 клеток нам не важно. И остается 2 клетки и 2 хода, I ходит тот, кто ставит „1". И у нас есть 2 варианта:

а). клетки стоят в одном/й $\left(\frac{\text{столбце}}{\text{строке}}\right)$ ⟶ назовём компонентой

б). клетки не имеют общих $\left(\frac{\text{столбцов}}{\text{строк}}\right)$ ↗

а).



$(0 \leq x \leq 98)$ x нам не важен.

И тут у нас есть 2 случая, когда есть чётная компонента (1), и когда её нет (2)
(разумеется, имею ввиду компоненты, которые ещё не полностью расписаны)

① просто ставим туда 1.

② тогда все неч, и ставим в любую 1, а в другую поставит противник и создаст нечетную.

б). Всё точно также

Ответ: выиграет I игрок.