№1 Д-ем, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt5-1}{4}$

Заметим, что

$\sin 3\cdot 18^\circ = \sin 54^\circ = \cos 2\cdot 18^\circ$ $\Big| \Rightarrow$

Значит если $\sin 18^\circ = x$

$\Rightarrow 3x - 4x^3 = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow (4x^2+2x-1)(x-1) = 0$

$x \neq 1 \Rightarrow 4x^2+2x-1=0$

$D = 20$

$x_{1,2} = \frac{-2\pm 2\sqrt5}{8} = \frac{-1\pm\sqrt5}{4}$ — не подх, т.к. $\sin 18^\circ > 0$

$\Rightarrow \sin 18^\circ = \frac{\sqrt5-1}{4}$

Пусть α: $\alpha \in (0;\frac{\pi}{2})$ и

$\sin\alpha = 0{,}1$.

Тогда $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha < 0{,}3$.

$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt5-1}{4} > \frac{2{,}2-1}{4} = 0{,}3 > \sin 3\alpha$.

Также заметим, что $3\alpha \in (0;\frac{\pi}{2})$, т.к. $\alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha < \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ (и $\sin 3\alpha > 0$)

Тогда в силу монотонности ф-ии (на промежутке $(0;\frac{\pi}{2})$)

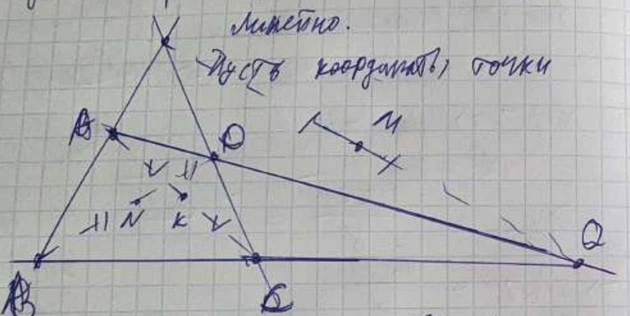
$\sin 18^\circ > \sin 3\alpha \Rightarrow 18^\circ > 3\alpha \Rightarrow 6^\circ > \alpha \Rightarrow \sin 6^\circ > \sin\alpha = 0{,}1$

$\square$

№4.

Будем линейно двигать прямую CP.
Тогда точки C, P, D также будут двигаться линейно.

Пусть координаты точки



$M - (x_1, y_1)$; $N - (x_2, y_2)$; $K - (x_3, y_3)$

В некоторой С.К.

ур-е прямой, прох. через точки M и N.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow (x-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

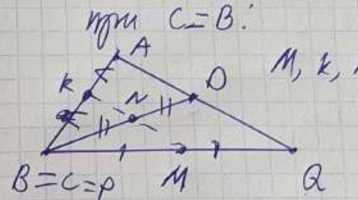
Если $K \in MN \Rightarrow (x_3-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_3-y_1)=0$

Слева многочлен степени ≤ 2 от t (t - время)

Т.к. все координаты линейно зав-ят от t.

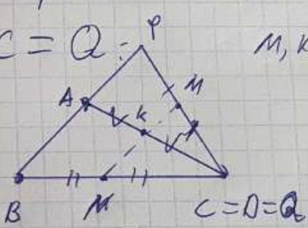
Заметим, что если многочлен степени ≤ 2 равен 0 в каких-то 3 точках, то он тождественно равен 0. Поэтому достаточно проверить 3 положения прямой CP.

при $C = B$:



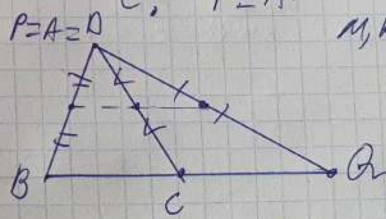
M, K, N - колл (средняя линия)

$C = Q$:



M, K, N - колл (сред. линия)

C; $P = A$.



M, K, N - колл (ср. линия)

Итого мы нашли 3 положения, в которых это верно $\Rightarrow$ верно всегда. □

№5

Стандартное обозначение:

$ord_p n = k$, если $n \vdots p^k$ но $n \not\vdots p^{k+1}$

Будем д-ть более общее утв-е:

$ord_2\left[(\sqrt{3}+1)^{2k+1}\right] = k+1$

Заметим, что

$$(\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1} = \sqrt{3}^{2k+1} + C^1_{2k+1}\sqrt{3}^{2k} + \dots + 1 - \sqrt{3}^{2k+1} + C^1_{2k+1}\sqrt{3}^{2k} - + \dots + 1 =$$

$$= 2\left(C^1_{2k+1}3^k + C^3_{2k+1}3^{k-1} + \dots + 1\right) \in \mathbb{N}$$

Также $0 < (\sqrt{3}-1) < 1 \Rightarrow 0 < (\sqrt{3}-1)^{2k+1} < 1$

$$\Rightarrow \left[(\sqrt{3}+1)^{2k+1}\right] = (\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1}$$

Заметим, что $(\sqrt{3}+1)^{2n} = x_n + y_n\sqrt{3}$, x_n и $y_n \in \mathbb{Z}$. $x_n - y_n\sqrt{3}$

Также из Бинома Ньютона $(\sqrt{3}-1)^{2n} =$

~~Тогда надо д-ть, что~~ $\cancel{ord_2(2x_{2k+1}) = k+1}$

Действительно, $(\sqrt{3}+1)^{2n} = \sqrt{3}^{2n} + C^1_{2n}\sqrt{3}^{2n-1} + \dots + 1$

$(\sqrt{3}-1)^{2n} = \sqrt{3}^{2n} - C^1_{2n}\sqrt{3}^{2n-1} + - \dots + 1$

№5 (продолжение 1)

Тогда $x_{n+1} + y_{n+1} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^{2n+2} =$

$= (x_n + y_n\sqrt{3})(4+2\sqrt{3}) = 4x_n + 6y_n + (2x_n + 4y_n)\sqrt{3}$

Т.к. $x_n, y_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + 6y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n \end{cases}$ | Выражая, получим $\longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{cases} x_{n+2} = 8x_{n+1} - 4x_n \\ y_{n+2} = 8y_{n+1} - 4y_n \end{cases}$

Тогда $(\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1} = (x_n + y_n\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) -$
$- (x_n - y_n\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) = (x_n + x_n\sqrt{3} + y_n\sqrt{3} + 3y_n) -$
$-(x_n\sqrt{3} - x_n - 3y_n + y_n\sqrt{3}) = 2(x_n + 3y_n)$

Д-ем индукцией, что $ord_2(2(x_n+3y_n)) = n+1$

$n = 0$:

$\sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1 = 2 \Rightarrow ord_2(2(1+3\cdot 0)) = 1$

($x_0 = 1$ и $y_0 = 0$, т.к. $(1+\sqrt{3})^0 = 1$)

$n = 1$:

$(\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = 4;\ y_1 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ord_2(2(4+6)) = ord_2 20 = 2.$

№5 (продолжение 2)

$n, n+1 \to n+2$?

$$2(x_{n+2}+3y_{n+2}) = 2(8x_{n+1}-4x_n+24y_{n+1}-12y_n) =$$

$$= 8(2(x_{n+1}+3y_{n+1})-(x_n+3y_n)) \circledequal$$

По предположению индукции

$x_{n+1}+3y_{n+1} = \alpha \cdot 2^{n+2}$, α – нечет

$x_n+3y_n = \beta \cdot 2^{n+1}$, β – нечет.

$$\circledequal 8(\alpha \cdot 2^{n+3} - \beta \cdot 2^{n+1}) = 2^{n+3}(8\alpha-\beta) \Rightarrow$$

α и β – нечет $\Rightarrow 8\alpha - \beta \underset{2}{\equiv} 1$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_2(2(x_{n+2}+3y_{n+2})) = n+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ переход доказан $\square$

№3

$$k\cdot(x^3+y^3+z^3)^2 \geq (x^2+y^2+z^2)^3$$

$$x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y.$$

$$x^3+y^3+z^3 = x^3+y^3-(x+y)^3 = -3x^2y-3xy^2 =$$
$$= 3xy(-x-y) = 3xyz$$

$$9k\cdot x^2y^2z^2 \geq (x^2+y^2+z^2)^3$$

$$\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^3 \geq 9k\, x^2y^2(x+y)^2$$

$$9k=n.$$

$$8x^6+8y^6+56x^3y^3+48x^4y^2+24x^5y+48x^2y^4+ \quad \Big|:x^3y^3$$
$$+24xy^5 \geq n(x^4y^2+x^2y^4+x^3y^3)$$

при $y=0$: $8x^6 \geq 0$ – верно $\forall x\in\mathbb{R}$

Аналогично при $x=0$ верно $\forall y\in\mathbb{R}$

$$\frac{x}{y}=a$$

$$8\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+48\left(a+\frac{1}{a}\right)+24\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+56 \geq$$
$$\geq n\left(a+\frac{1}{a}+2\right)$$

Пусть $a+\frac{1}{a}=t$; $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

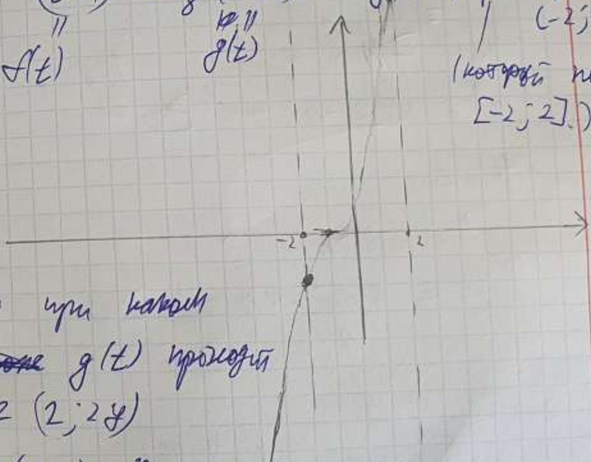
Заметим, что $t^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2 \Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=t^2-2$

$$t^3=a^3+3a+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^3} \Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=t^3-3t$$

$$8(t^3-3t)+48t+24(t^2-2)+56 \geq n(t+2)$$

$$\cancel{8(t\ldots)}\ 8(t^3+3t^2+3t+1) \geq n(t+2)$$

$$\underbrace{(t+1)^3}_{f(t)} \geq \underbrace{\frac{n}{8}(t+2)}_{g(t)}$$ – пучок., прох. через $(-2;0)$ (который не $\exists$ на $[-2;2]$.)



Узнали при каком ~~наклоне~~ n $g(t)$ проходит через $(2;27)$

$$\frac{n}{8}(2+2)=\frac{n}{2}=27 \Rightarrow n=54$$

Заметим, что при данном знач. n $g(t)$ касается $f(t)$: $(t+1)^3=\frac{27}{4}(t+2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4t^3+12t^2-15t-50=0 \Leftrightarrow (t-2)(4t^2+20t+25)=0$$

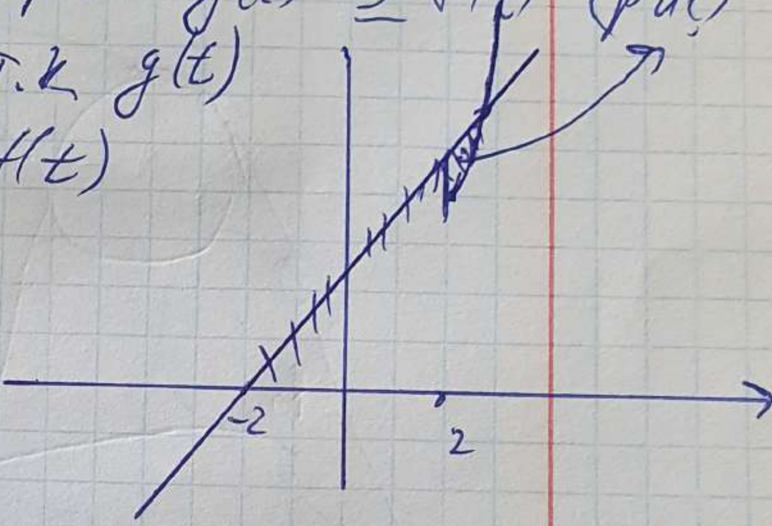
~~$\Leftrightarrow$ … $\Rightarrow$ касается в~~ $\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\frac{5}{2} \end{array}\right.$

№3 (продолжение)

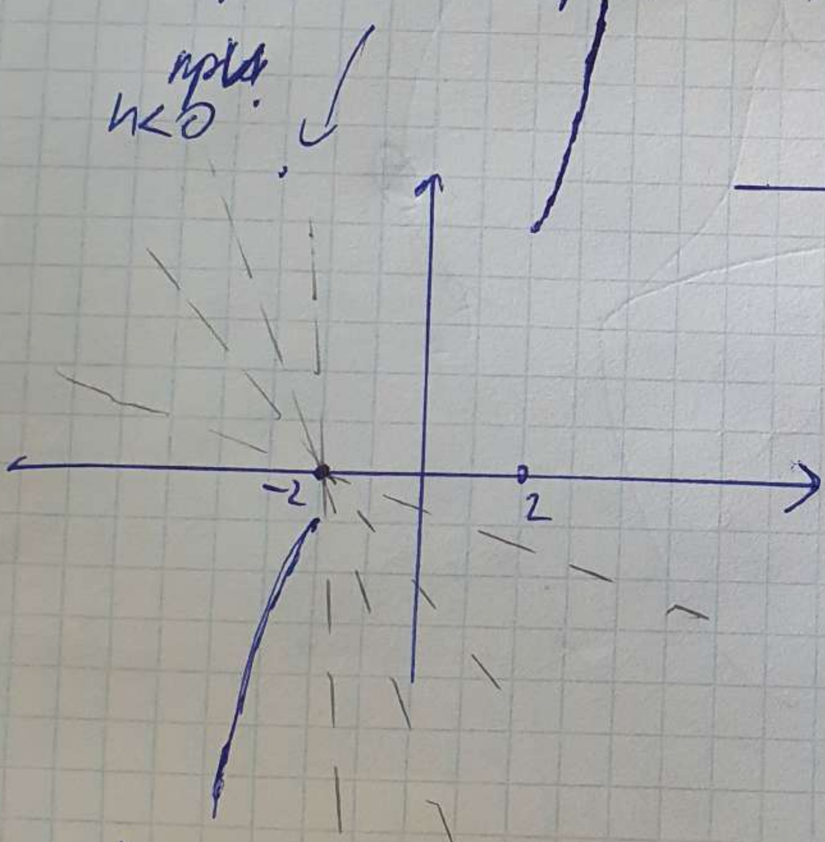
г) касается при $t = -2{,}5$

Если $n > 54$, то не подх, т.к. будет промежуток при котором $g(t) \geq f(t)$ (рис)

Если $n \leq 54$ — подх, т.к. $g(t)$ не пересекает $f(t)$



при $n<0$:

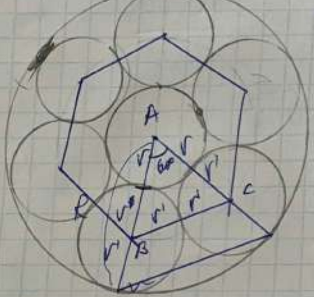


Значит $n_{max} = 54 \Rightarrow k_{max} = 6$

Ответ: $k_{max} = 6$.

№7

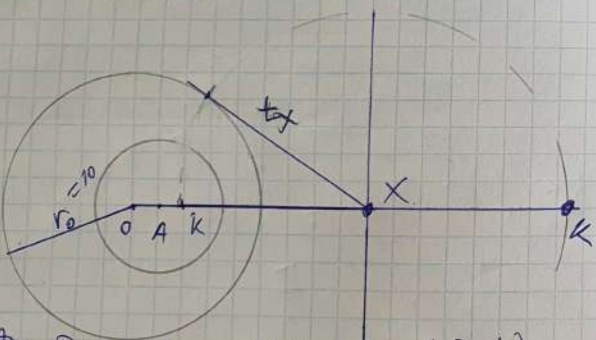
Поймём как должны соотноситься радиусы концентрических окр-ей, чтобы между ними можно было замкнуть 6 окружностей



ΔABC — р/с. $\Rightarrow$

$\Rightarrow r + r' = 2r' \Rightarrow r = r'$

$\Rightarrow \dfrac{R}{r} = 3.$



Пусть $x = OA \cap$ рад. ось(Ω, γ)

$Ox = d_1$; $Ax = d_2$

Тогда $\begin{cases} d_1^2 - 100 = d_2^2 - r^2 \\ d_1 - d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 = \dfrac{101 - r^2}{2}$; $d_2 = \dfrac{99 - r^2}{2}$

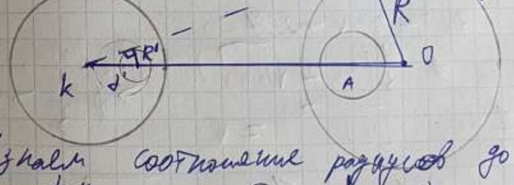
t_x — длина касат. к γ (и к Ω, т.к. они равны из-за того, что x на рад. оси)

Тогда $t_x^2 = d_1^2 - 100 = \dfrac{r^4 - 202r^2 + 9801}{4}.$

Пусть $\omega(x, t_x) \cap OA = k$ (их 2, k — самая дальняя см рис)

Рассмотрим инверсию с центром в k и единичным радиусом.

При такой инверсии $\Omega \to \Omega'$; $\gamma \to \gamma'$, причём Ω' и γ' концентрические (факт достаточно известный)



Узнаем соотношение радиусов до и после i

$Ok = d$ из подобия $\dfrac{d'}{d} = \dfrac{R'}{R}$; $dd' = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{R'}{R} = \dfrac{1}{d^2} \Rightarrow R = d^2 \cdot R'$

Тогда $r = Ak^2 \cdot r'$

$r_0 = 10 = Ok^2 \cdot r_0'$. Как мы выяснили ранее $\dfrac{r_0'}{r'} = 3.$

№7 (продолжение)

$\frac{r}{10} = \frac{AK^2}{3OK^2}$; $AK = d_2 + t_x$; $OK = d_1 + t_x$

$r = x$

Получаем ур-е:

$$\frac{3x}{10} = \frac{99 - x^2 + \sqrt{x^4 - 202x^2 + 9801}}{101 - x^2 + \sqrt{x^4 - 202x^2 + 9801}}$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{x^4 - 202x^2 + 9801}\,(3x - 10) = 3x^3 - 10x^2 - 303x - 990$$

$$9x^6 - 60x^5 - 1718x^4 + 12120x^3 + 68009x^2 - 588060x + 980100 = 9x^6 - 60x^5 - 1718x^4 + 12000x^3 + 72009x^2 - 599940x + 98100$$

$$120x^3 - 4000x^2 + 11880x = 0 \quad |:x \neq 0$$

$$3x^2 - 100x + 297 = 0$$

$x = \frac{1}{3}(50 \pm \sqrt{1609})$ — не подх, т.к. $> \frac{50}{3} > 9$.

$$x = \frac{1}{3}(50 - \sqrt{1609}) = r$$

Ответ: $r = \frac{1}{3}(50 - \sqrt{1609})$

№ 8

Пусть A – исходное мн-во; B – мн-во попарных сумм и $n \neq 2^k$

$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$

$S_k(x_1, x_2 \dots x_m) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_m^k$

Индукцией по k покажем, что S_i для A однозначно определяются значениями S_i для B $(1 \le i \le k)$

База: $k=1$: $S_1(B) = C_{n-1}^1 S_1(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1(A) = \frac{S_1(B)}{n-1}$

$k \to k+1$:

$$S_k(B) = \sum_{i<j} (a_j + a_i)^k = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{r=0}^{k} C_k^r a_i^r a_j^{k-r} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k} C_k^r \sum_{i \neq j} a_i^r \cdot a_j^{k-r} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k} C_k^r \left(S_r(A) \cdot S_{k-r}(A) - S_k(A) \right) =$$ т.к. $S_0(A) = n$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \cdot S_r(A) \cdot S_{k-r}(A) + (n - 2^{k-1}) \cdot S_k(A)$$

все опред по предполож. индукции

$\to$ при $n \neq 2^{k-1}$ $S_k(A)$ однозначно опред. Q

№8 (продолжение)

Значит

$S_1(A) \ldots S_n(A)$ однозначно опред. мн-вом B. _которые из обоб. Т. Виета

Обозначим $\sigma_k(A) = \sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le n} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}$

По формуле Ньютона

$n \cdot \sigma_n = \sigma_{n-1} \cdot S_1 - \sigma_{n-2} \cdot S_2 + - \ldots + (-1)^n \sigma_1 \cdot S_{n-1}$

$\Rightarrow$ по $S_i(A)$ последовательно можно восстановить $\sigma_i(A)$, а по $\sigma_i(A)$ можно восстановить элементы A, т.к. по ним восстанавливается многочлен.

$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n = 0$

Его корнями и будут a_i.

(пояснение как искать корни. Рассмотрим наибольший элемент из B. ~~Пере~~ т.к. $a_i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ перебираем все числа от 1 до $\max(B)$. ~~на~~ Если найдём n $\Rightarrow$ ~~то~~ восстановили. Если меньше, значит какие-то корни имеют кратность. Будем делить наш многочлен на $(x - a_e)$, где a_e – найденный корень) на все найденные корни, снова подставляем все числа от 1 до $\max(B)$ в новый полином, и т.д. пока не найдём все n корней)

№6

Пример на 2n−3:

В графе K_4 удалим ребро, а на 2 несмеж. вершины добавляем новые => при увеличении вершин на 1 добавляются 2 ребра => ~~в~~ всего ребер $\leq 5+2(n-4)=2n-3$.

Пример работает, т.к. у добавленых вершин степень будет равна 2 => при удалении любого узла ~~граф~~ граф ~~его~~ ~~потеряет~~ связность.

№2 | у нас сотни имеют вид $[\overline{A00}; \overline{A99}]$.

Д-ем, что в сотне не может стоять ≥ 12 подряд идущих чисел Харшад.

Далее везде используется обозначение: $S(x)$ – сумма цифр числа x.

Пусть ~~n~~ – одно из наших ~~чисел~~ чисел.

$S(n) = S(n+9)$ $\forall n$ при $n \not\vdots 10$ и

~~и~~ $n \neq \overline{a_k a_{k-1} \ldots 9 a_0}$

Если $S(n+9)$ – тоже число харшад $\Rightarrow$

$\Rightarrow n \vdots S(n)$ и $(n+9) \vdots S(n+9) = S(n) \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+9-n) \vdots S(n) \Rightarrow 9 \vdots S(n)$

Если $n \not\vdots 3 \Rightarrow S(n) = 1 \Rightarrow$ чисел такого вида

$\Rightarrow n = \underbrace{100\ldots0}$, однако для ~~них~~ $S(n) \neq S(n+9)$?!?! $\Rightarrow n \vdots 3$.

Теперь заметим, что среди 12 идущих подряд чисел есть три пары, различ. на 9

пусть $a, a+1, a+2, \ldots +a+11$ – те самые 12 подряд идущих. Среди чисел $a, a+1, a+2$ – 2 не делятся на 3, причем ≥ 1 из них

№2 (продолжение)

не имеет вид $1\overline{0\dots 0}$??!

не имеет вид 10...0 ⇒

⇒ не может быть 12 подряд идущих в 1 сотне чисел Жарихад.

Предположим, что ровно 22 может быть. Тогда 11 первых чисел стоят до перескока через сотню, а другие 11 после. Однако 11 чисел ровно до перескока стоять не могут.

Действительно, значит числа от $\{A89\}$ до $A99$, однако $S(A89) = S(A98)$ и $S(A89) \geq 8 + 9 > 9$

⇒ одно из них не число Жарихад ⇒

⇒ нет, не может быть 22 подряд идущих □.