(1) $a+c-4b^2 \le \frac{1}{4}$ или

$a+b-4c^2 \le \frac{1}{4}$ или

$b+c-4a^2 \le \frac{1}{4}$

Предположим, что это не так, т.е.

$$\begin{cases} a+c-4b^2 > \frac{1}{4} \\ a+b-4c^2 > \frac{1}{4} \\ b+c-4a^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Сложим нер-ва:

$$2a+2b+2c-4b^2-4c^2-4a^2 > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

перегруппируем:

$$-\left(4b^2-2b+\frac{1}{4}\right)-\left(4a^2-2a+\frac{1}{4}\right)-\left(4c^2-2c+\frac{1}{4}\right) > 0$$

$$-\underbrace{\left(2b-\frac{1}{2}\right)^2}_{\ge 0}-\underbrace{\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2}_{\ge 0}-\underbrace{\left(2c-\frac{1}{2}\right)^2}_{\ge 0} > 0$$

Получаем, что сумма трех $=0$ или отрицательных чисел строго >0

$\Rightarrow$ противоречие, т.е. такого быть не может, и хотя бы 1 число $\le \frac{1}{4}$

(2) [1 .. 2023] и 2024

Нужно определить делители числа 2024 и найти числа, имеющие те же делители!

$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$

1012

506

253

23

1) Числа, делящиеся на 2:

$2023 : 2 = 1011,5 \Rightarrow 1011$

2) Делящиеся на 11: 183

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 11 \\ \hline 11 & 183 \\ \hline 92 & \\ 88 & \\ \hline 43 & \\ 33 & \\ \hline 10\ldots & \end{array}$$

3) Делящиеся на 23: 87

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 23 \\ \hline 184 & 87 \\ \hline 183 & \\ 161 & \\ \hline 22\ldots & \end{array}$$

Заметим, что при исключении чисел, делящихся на 2, мы исключаем и числа, делящиеся на $2 \cdot 23$, $2 \cdot 11$, $2 \cdot 11 \cdot 23$, при исключении чисел, делящихся на 11, исключили и числа, делящиеся на $11 \cdot 2$, $11 \cdot 23$, $11 \cdot 2 \cdot 23$, а при исключении чисел, делящихся на 23, исключаем числа, делящиеся на $23 \cdot 2$, $23 \cdot 11$, $23 \cdot 11 \cdot 2$.

Получается, что числа с двумя совпадающими делителями исключаются дважды, и их нужно вернуть

2023 | 22
198 | 91
43
22
21...

2023 | 46
184 | 43
183
138
41...

2023 | 506
1518 | 3
505...

2023 | 253
1771 | 7
252...

А вот число ~~7~~ с 3 ~~[illegible]~~ совпадающими множителями в итоге не было учтено ни разу – это количество нужно вычесть.

Итого, чисел с совпадающими множителями:

$$\underset{(:2)}{1011} + \underset{(:11)}{183} + \underset{(:23)}{87} - \underset{(:(2\cdot 11))}{91} - \underset{(:(2\cdot 23))}{43} - \underset{(:(11\cdot 23))}{7} + \underset{(:(2\cdot 11\cdot 23))}{3} =$$

$$= 1143$$

Тогда чисел без совпадающих делителей (взаимно простых с 2024)

$$2023 - 1143 = 880$$

Вероятность выбора такого числа: $\dfrac{880}{2023}$

Рассмотрим ситуацию с квадратами 2×2, 3×3, 4×4 и 5×5, чтобы вывести общую формулу. n-размерность.

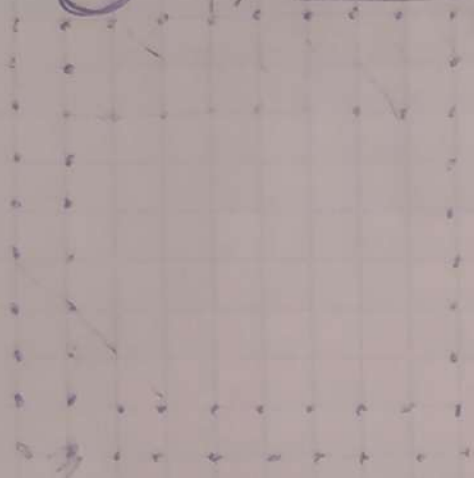
Заметим, что кол-во квадратов со стороной 1 равно размерности в квадрате, со стороной 2 – $(n-1)^2$, 3 – $(n-2)^2$ ... со стороной n – 1^2.

„Диагональных" квадратов со стороной ~~[illegible]~~ 1 – $(n-1)^2$, со стороной 2 – $(n-3)^2$, т.е. с шагом 2.

Тогда для квадрата 9×9 кол-во квадратов будет:

$$\Sigma_{\square} = 9^2+8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2+$$
$$+8^2+6^2+4^2+2^2 = 405$$

③ - решения



1×1	2·2	3·3	4·4	5·5	6·6	7·7	8×8	9×9
9^2	8^2	7^2	6^2	5^2	4^2	3^2	2^2	1^2

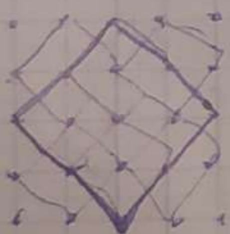
d 1×1	d 2×2	d 3×3	d 4×4
8^2	6^2	4^2	2^2

2×2

$1\cdot 4 + 4\cdot 1 = 2^2 + 1^2 + 1^2$

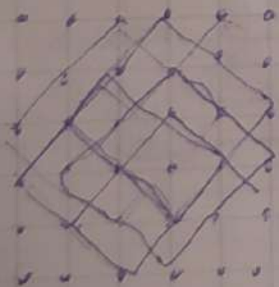
3×3

1×1	2×2	3×3	d 1×1
3^2	2^2	1^2	2^2



4×4

1×1	2×2	3×3	4×4	d 1×1	d 2×2
4^2	3^2	2^2	1^2	3^2	1^2



5×5

1×1	2·2	3×3	4·4	5·5	d 1×1	d 2·2	d 3·3
5^2	4^2	3^2	2^2	1^2	4^2	2^2	X

④ 2023...

Каждый член последовательности определяется по четырем предыдущим цифрам, но всего таких комбинаций ограниченное число — 10^4, и для бесконечной последовательности комбинация однажды должна повториться, т. е. последовательность зациклится.

Чтобы снова повторились стартовые цифры 2023, последовательность должна зациклиться без предпериода, а для этого предыдущее состояние должно однозначно восстанавливаться по последующему. Проверим:

$$4819\,|\,2023$$

Очевидно, что состояние восстанавливается, предпериода нет, и 2023 повторяется.

(5)

Нужно доказать, что ABC — правильный, ~~Равносторонний~~

В ~~[illegible]~~ правильном треугольнике все углы равны. Пусть это не так, и $\angle BCA > \angle CAB$.

Тогда ~~[illegible]~~

1) $AB > BC$, т.к. в Δ против большего угла лежит большая сторона

2) в Δ OAC $\underline{AO > OC}$, т.к. $\angle OCA > \angle OAC$ — это половины углов $\angle BCA$ и $\angle CAB$.

3) По теореме биссектрисы и п. 1)

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} > 1, \text{ т.е. } \underline{AL > LC}$$

Таким образом

$$\begin{matrix} AO > OC \\ AL > LC \end{matrix} \Rightarrow AO + AL > OC + LC \Rightarrow$$

$$AO + AL + OL > OC + LC + OL$$

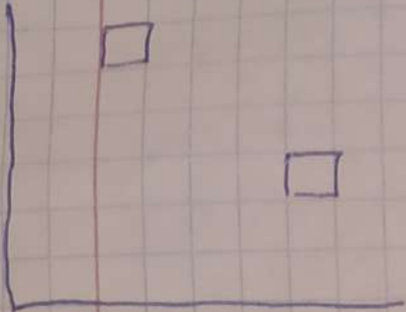
$$P_{(1)} = P_{(2)}$$ — противоречие

Таким образом можно доказать, что

все углы в треугольнике
ABC равны, и он является
правильным треугольником.

⑥ Доска 100×100 => 10.000 кл,
5000 единиц и 5000 нулей.
Заметим, что число единиц – чётное, если есть хотя бы
1 строка (или столбец) с нечетным кол-вом единиц, то есть и вторая (или столбец) строка с нечетным, и выиграет первый.
Предположим что на доске остались 2 клетки. Они могут быть или в одной ~~~~ строке или в разных.
Если в одной строке, то переворачиваем квадрат и сводим к аналогичной ситуации, но со столбцами.
Ситуации, когда 2 клетки находятся и в одной строке, и в одном столбце быть не может.
Итак, у нас есть 2 последн

клетки в разных строках



Могут быть варианты.

1 строка	ч	н	н = ч
2 строка	ч	н	ч = н

1) Сумма в обеих строках четная
2) " — " — " нечётная
3) в одной строке сумма четная, во второй — нечетная

=> 1) Первый игрок ставит 1 в любую чётную строку, сумма становится нечётной, вторая строка после простановки 0 остаётся четной, т.е. есть где-то ещё одна нечетная строка (или 3, или 5 ...) — выиграл первый игрок.

2) Первый игрок ставит 1 в любую нечетную строку, сумма четная. Второй игрок ставит 0 в нечётную строку —

сумма не меняется, она остаётся нечетной, где-то есть ещё нечет. строка (или 3, 5...) => выиграл первый игрок.

3) Первый игрок должен добавить 1 к чётной строке. Добавление $\emptyset$ к нечётной оставит её нечетной => как минимум 2 нечетных строки => первый выиграл.

Всегда выигрывает первый игрок при правильной игре.