№1

$a+c-4b^2$; $b+c-4a^2$; $a+b-4c^2$ — какое-то из чисел $\leqslant \frac{1}{4}$

Предположим обратное. Пусть каждое из данных чисел строго больше, чем $\frac{1}{4}$. То есть:

$$\begin{cases} a+c-4b^2 > \frac{1}{4} \\ b+c-4a^2 > \frac{1}{4} \\ a+b-4c^2 > \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c > 4b^2+\frac{1}{4} \\ a+b > 4c^2+\frac{1}{4} \\ b+c > 4a^2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

Заметим, что правые части неравенств очень похожи на формулу квадрата разности. Преобразуем.

$$-2b+a+c > 4b^2+\frac{1}{4}-2b$$
$$a+b-2c > 4c^2+\frac{1}{4}-2c$$
$$-2a+b+c > 4a^2+\frac{1}{4}-2a$$

$$+\begin{cases} a+c-2b > \left(2b-\frac{1}{2}\right)^2 \\ a+b-2c > \left(2c-\frac{1}{2}\right)^2 \\ b+c-2a > \left(2a-\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\cancel{2a}+\cancel{2b}+\cancel{2c}-\cancel{2a}-\cancel{2b}-\cancel{2c} > \left(2c-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$0 > \left(2c-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$$

Отметим, что правая часть обязательно положительна, т.к квадраты всегда положительны, значит мы пришли к противоречию $\Rightarrow$ предположение изначально было неверно, то есть найдётся среди данных чисел какое-то число, ~~меньшее~~ которое будет не больше $\frac{1}{4}$.

$\boxed{№2.}$

Вероятность того, что НОД $[n;2024] = 1$ — ?

Рассмотрим разложение числа 2024 на простые множители.

$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$

Найдём кол-во возможных n, у которых есть общий множитель с 2024, то есть они не взаимнопросты, поэтому их НОД $\neq 1$.

$2023 : 2 \approx \boxed{1011}$ — чётных чисел, кот. имеют общий дел. $= 2$.

$2023 : 11 \approx 183$ (числа, кратные 11), причём среди них $183 : 2 \approx 91$ чётных чисел, которые мы посчитали дважды. Тогда $183 - 91 = \boxed{92}$ числа имеют с 2024 общий делитель, но мы их ещё не считали.

$2023 : 23 \approx 87$ (кратные 23), среди них нечётных — $87 : 2 = 44$. Но в этом числе есть числа, кратные и 11, и 23, но не $\vdots 2$. Найдём их кол-во:

$87 : 11 \approx 7$, $7 : 2 \approx 4$ — нечётных чисел, которые кратны 11 и 23, но не кратны 2.

Общее кол-во:

$1011 + 92 + 44 - 4 = 1143$ — чисел, которые не подходят под НОД$(n;2024) = 1$.

Тогда

$2023 - 1143 = 880$ - чисел, удовлетворяющих условию.

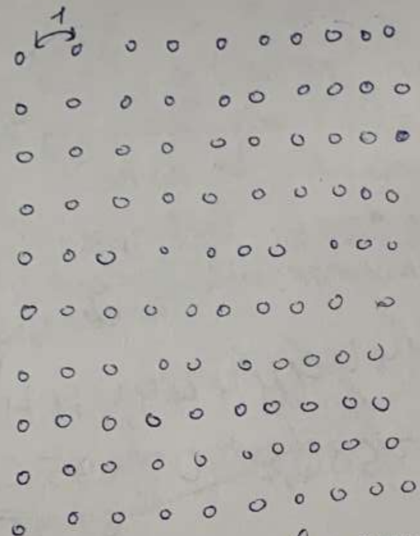
Найдем их процентное содержание:

$$\frac{880}{2023} = \frac{x}{100}\% = 43{,}5\%$$

Ответ: $43{,}5\%$

№3.

квадрат 10x10:



$n \in N$

1) Заметим, что в квадрате, где его стороны параллельны клеткам, можно провести отрезки, соединяющие середины, и тогда получится ещё квадрат. Это сработает, если в „ровном" квадрате было чёт длина ребер, тогда середина окажется в точке.

Так как ромб можно построить в каждом квадрате, то будем действовать так:

- если в квадрате $n \times n$, n - чётная, то полученное кол-во квадратов умножаем на 2.

2) Если считаем квадраты со стороной n, то вариантов расположить верхнюю левую верш. в строке ровно $(10-n)$, также как и вариантов расположить нижнюю левую вершину в столбце. Тогда вариантов построить квадрат $n \times n$ в большом изначальном $= (10-n)(10-n)$

3) $n \leq 10$, тк в противном случае вершины не попадут в точки изн. квадрата; $n > 0$.

$(0 \leq n \leq 10)$

4) Считаем:

$n=1 \to 9^2 = 81$

$n=2 \to 8^2 \cdot 2 = 128$

$n=3 \to 49 = 7^2$

$n=4 \to 6^2 \cdot 2 = 72$

$n=5 \to 5^2 \cdot 1 = 25$

$n=6 \to 4^2 \cdot 2 = 32$

$n=7 \to 3^2 = 9$

$n=8 \to 2^2 \cdot 2 = 8$

$n=9 \to 1^2 = 1$

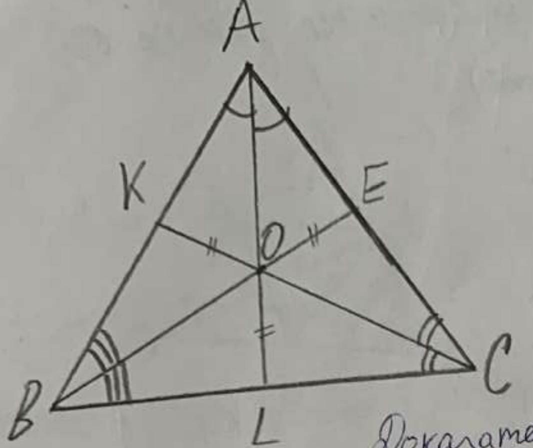
$n=10 \to 0^2 \cdot 2 = 2$

Суммируем:

$$\underbrace{\underbrace{81+128}_{130... }+49+72}_{200}+\underbrace{25+32}_{57}+9+\underbrace{8+1}_{10}+2 = 407$$

Ответ: 407

№5

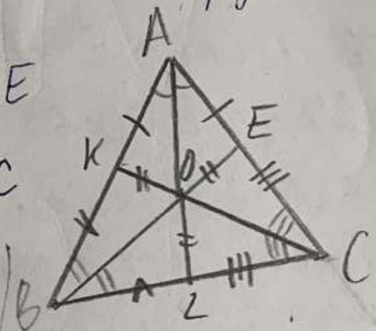


Дано:
$\triangle ABC$
AL - бисс.
CK - бисс.
BE - бисс.
P треугольников равны.

Док-ать:
$\triangle ABC$ - правильный

Доказательство:

1) Точка O - точка пересечения бисс. - является центром вписанной окружности, поэтому $OK = OE = OL$

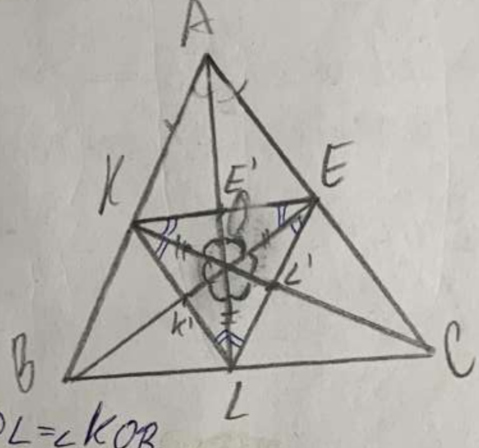


2) $P_{\triangle AKO} = P_{\triangle AOE} \rightarrow AO + OK + KO = AO + OE + AE \rightarrow AK = AE$
$P_{\triangle BKO} = P_{\triangle BLO} \rightarrow KO + OB + BK = OL + BO + BL \rightarrow BK = BL$
$P_{\triangle OLC} = P_{\triangle OEC} \rightarrow LC + OL + OC = OC + OE + EC \rightarrow LC = EC$

3) AO - общая, $AK = AE$, $KO = OE$ $\Big\}$ $\triangle AKO = \triangle AEO$ $\Rightarrow$ $\angle AOK = \angle AOE$

BO - общ., $BK = BL$, $KO = OL$ $\Big\}$ $\triangle BKO = \triangle BLO$ $\Rightarrow$ $\angle KOE = \angle AOE$

OC - общ., $OE = OL$, $LC = EC$ $\Big\}$ $\triangle COL = \triangle COE$ $\Rightarrow$ $\angle COL = \angle COE$



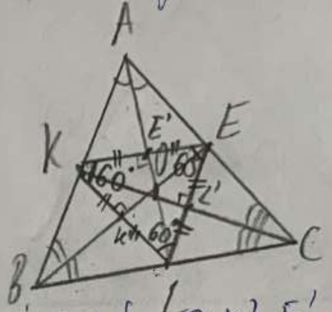
4) $\angle KOA = \angle LOC$ (вертик.)
$\angle AOE = \angle BOL$ (вертик.)
$\angle EOC = \angle KOB$ (вертик.)

Из п.3 и п.4 $\Rightarrow \angle AOK = \angle AOE = \angle EOC = \angle COL = \angle BOL = \angle KOB$.

5) $\angle KOE' + \angle E'OE = \angle EOL' + \angle L'OL = \angle LOK' + \angle K'OK$
$\Downarrow$
$KO = OL = OE$, $\angle KOE = \angle EOL = \angle LOK$, $OE = OL = OK$ $\Big\}$ $\Rightarrow \triangle KOL = \triangle KOE = \triangle EOL$ по 1-ому признаку равенства треуг. (по 2 ст. и углу м.н)

Тогда $\angle KEO = \angle EKO = \angle OKL = \angle KLO = \angle OLE = \angle OEL \Rightarrow \angle EKL = \angle KLE = \angle KEL \Rightarrow$

$\triangle KEL$ – равносторонний, то есть правильный, и все его углы по $60°$.



б) $\angle KE'O = 90°$ (т.к. в равнобедр. $\triangle KEO$ бисс совп. с медианой)

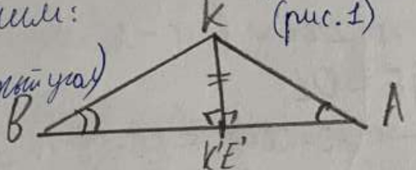
$\angle KE'A$ – смежный с $\angle KE'O \Rightarrow \angle KE'A = 180° - 90° = 90°$

Таким же рассуждением приходим к:

$\angle BK'K = 90°$.

$\angle BK'L = \angle LL'C = \angle CL'E = \angle EE'A = \angle KE'A = 90°$

Приложим $\triangle BKK'$ и $\triangle KE'A$ друг к другу так, чтобы B, K', E', A лежали на одной прямой, а K' совместилась с E'. $KE' = KK'$ как середины равных $KE = KL$. Тогда K совместится с K. Получим: (рис. 1)



$\angle BKK' + \angle K'KE' + \angle E'KA = 180°$ (развернутый угол)

$\angle E'KK' = \angle EKL = 60°$

$\Downarrow$

$\angle BKK' + \angle E'KA = 120°$

В рис. 1 $\angle BKA = \angle BKK' + \angle E'KA = 120°$, тогда по теор. о сумме углов треугольника, $\angle KBA + \angle KAB = 180° - 120° = 60°$

Аналогичные рассуждения проведём для: 1) $\triangle AE'E$ и $\triangle EL'C$.

Получим, что $\angle E'AE + \angle ECL' = 60°$

2) $\triangle CL'L$ и $\triangle LK'B \Longrightarrow \angle LBK' + \angle L'CL = 60°$

На основе полученных данных составим уравнения:

$\angle E'AE + \cancel{\angle ECL'} = \angle LK'B + \cancel{\angle L'CL} \Rightarrow \angle ECL' = \angle L'CL$ (CK – бисс., а $L' \in CK$)

$\Downarrow$

$\angle E'AE = \angle LBK'$

$\Downarrow$

$\angle LAE = \angle LBE$

$\Downarrow$

)=))

$\cancel{\angle LBK'} + \angle L'CL = \cancel{\angle KBK'} + \angle KAE'$

$\Downarrow$

$\angle LBK' = \angle KBK'$ (BO – бисс., $K' \in BO$)

$\Downarrow$

$\angle L'CL = \angle KAE'$

$\Downarrow$

$\angle BCK = \angle BAL$ (т.к. $L' \in CK$; $E \in AC$; $K \in BA$; $L \in BC$)

$\Downarrow$

)=)))

)=))
)=))) $\Rightarrow$))=)=)))

$\Downarrow$

2))+2)=2)))

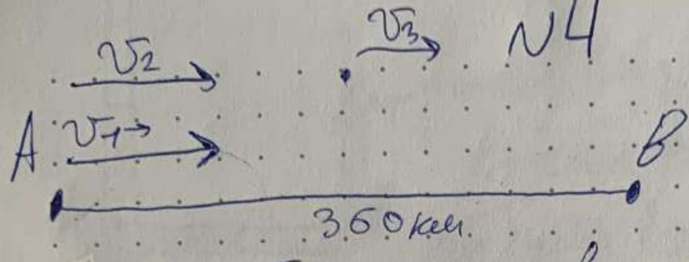
$\Rightarrow \angle ABC = \angle BCA = \angle BAC$

$\Downarrow$

$\triangle ABC$ – равносторонний, т.е правильный.

ч.т.д.

№4



$S = 360$ км

Посчитаем кол-во перерывов у Константина:

$72 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ ч} = 144$ (км) – расстояние между точками привала.

$360 : 144 \approx 2$ (остаток не берём, т.к. прошло менее 2 часов)

Тогда $t_к = \frac{360 \text{ км}}{72 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} + 2 \cdot 0{,}25 \text{ ч} = 5{,}5 \text{ ч}$

Найдём за какое время Семён преодолел маршрут:

$$t_c = \frac{(360:2) \text{ км}}{90 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} + \frac{(360:2) \text{ км}}{80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} + 1 \text{ ч} = 5{,}25 \text{ ч}$$

Но т.к. Семён проспал, то его время с момента старта Константина $= t_c' = 5{,}25 + 2 \text{ ч} = 7{,}25 \text{ ч} > 5{,}5 \text{ ч}$.

---

1. ср. $v_c = \frac{S}{t_c} = \frac{360 \text{ км}}{5{,}25 \text{ ч}} \approx 68{,}6$ км/ч

   ср. $v_{кон} = \frac{S}{t_к} = \frac{360 \text{ км}}{5{,}5 \text{ ч}} \approx 65{,}5$ км/ч

2. Быстрее приедет Константин (см. вышенаписанное)

3. Нет, не перегнал бы. Обоснование:

$$t_c' - 1 \text{ ч} = 7{,}25 \text{ ч} - 1 \text{ ч} = 6{,}25 \text{ ч} > 5{,}5 \text{ ч}$$

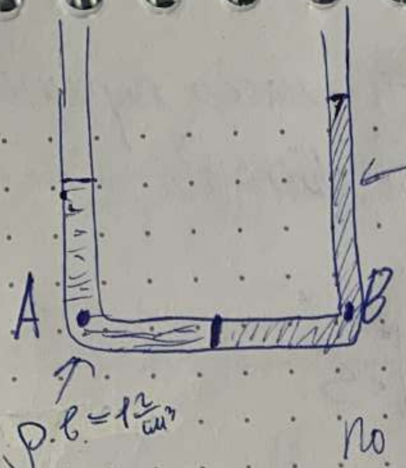
$$\Downarrow$$

$$t_к < t_{c1}$$

$$\Downarrow$$

Константин всё равно был бы быстрее.

№5



1) Найдём начальную высоту воды.

Возьмём точку В такой, чтобы над ней были все 20 см керосина. Тогда по закону равновесия $p_B = p_A$, если А взять на точно таком же уровне, как и В, только в колене с водой. Если бы это было не так, вода куда-то бы текла, а по условию у нас равновесие.

тогда: $\rho_в g h_в = \rho_к g h_к \;/:g$

$$\rho_в h_в = \rho_к h_к$$

$$h_в = \frac{\rho_к h_к}{\rho_в} = \frac{0{,}8 \cdot 20 см}{1 \frac{г}{см^3}} = \frac{4}{5} \cdot 20 = 16 (см)$$

$h_в = 16 см$

$h_в' = 16 см \cdot 2 = 32 (см)$ - высота воды после появления поршня

$\Delta h_в = 16 см$

Т.к. вода поднялась на $\Delta h_в$, то объём воды в горизонт. перекладине уменьшился на $S \Delta h_в$, тогда объём керосина в гориз. перекладине увеличился на $S \Delta h_в$, значит, в колене с керосином объём керосина уменьшился на $S \Delta h_в$, а тк S везде постоянно, то уровень керосина уменьшился на $\Delta h_в = 16 см$

По условию равновесия:

$p_1 = p_2$ (снова берём точки А и В вблизи дна) $\rightarrow p_A = p_B$

$h_k' = h_k - \Delta h_в$ $\quad$ m – масса поршне

$S = 50\,см^3$

$p = \frac{F}{S}$ $\quad$ $F = V\rho g$

Преобразуем равенство:

$$\frac{V_в \rho_в g}{S} = \frac{mg}{S} + \frac{V_к \rho_к g}{S} \quad \Big| \cdot S$$

$$V_в \rho_в g = mg + V_к \rho_к g \quad \Big| : g$$

$$V_в \rho_в = m + V_к \rho_к$$

$$m = V_в \rho_в - V_к \rho_к \qquad V = h \cdot S$$

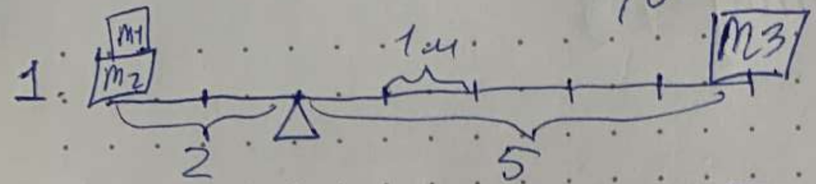
$$m = S h_в \rho_в - S h_к' \rho_к = S(h_в \rho_в - h_к' \rho_к) \qquad h_к' = h_к - \Delta h_в = 20\,см - 16\,см = 4\,см$$

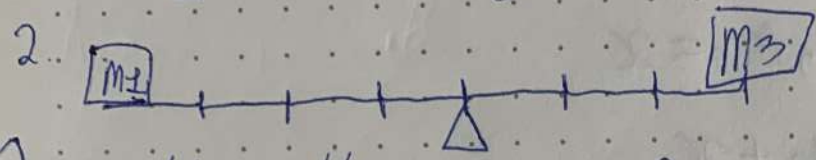
$$m = 50\,см^3 \cdot \left(\overset{32}{32\,см \cdot 1\,\tfrac{г}{см^3}} - \overset{3{,}2}{4\,см \cdot 0{,}8\,\tfrac{г}{см^3}}\right) \quad (28{,}8)$$

$$m = 50 \cdot 28{,}8 = 1440\,г = 1{,}440\,кг$$

Ответ: 1,44 кг

№6





① $M_1 = M_2 \rightarrow m_1 g l_1 = m_2 g l_2$

$$\begin{cases} 2(m_1g+m_2g) = 5m_3 & (1)\ |\cdot 2 \\ 4m_1g = 3m_3g & (2)\ |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \cancel{4m_1g} + 4m_2g = 10m_3 \\ \cancel{-4m_1g} = -3m_3g \end{cases}$$

$4m_2g = 7m_3g \quad |:g$

$m_2 = \frac{7}{4}m_3$

$m_2 = 2$ кг

$\frac{4}{7}\cdot 2 = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

$m_3 = \frac{4}{7}m_2$

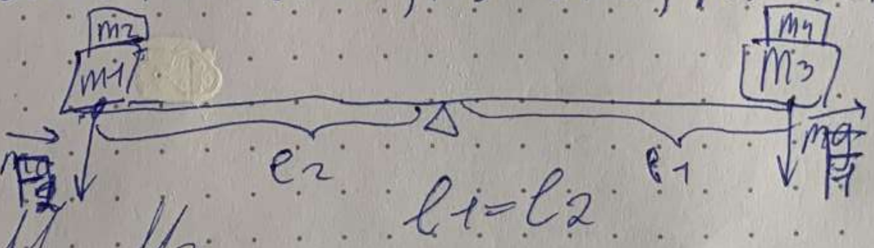
$m_3 = 1\frac{1}{7}$ кг

$4m_1 = 3m_3$

$m_1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}m_2 = \frac{3}{7}m_2 = \frac{3\cdot 2}{7}$ кг $= \frac{6}{7}$ кг

Ответ: $m_1 \approx 857$ г; $m_2 = 2$ кг; $m_3 = 1143$ г

②



$l_1 = l_2$

$M_1 = M_2$

$F_1 l_1 = F_2 l_2 \longrightarrow F_1 = F_2$

$g(m_1+m_2) = g(m_3+m_4) \quad |:g$

$m_1+m_2 = m_3+m_4$

Выразим в m_2; $m_4 = x$

$m_2 + \frac{3}{7}m_2 = \frac{4}{7}m_2 + x$

$x = \frac{10}{7}m_2 - \frac{4}{7}m_2 = \frac{6}{7}m_2$

$x = m_4 = 1714$г

Ответ: 1,714кг – масса m_4.