

Третий открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.

Май 2023.

Стартовая лига (7 класс).

Каждая задача оценивается из 7 баллов. За неполные решения задач могут ставиться частичные баллы. Ответ без обоснования (даже правильный) всегда оценивается нулем баллов. Все доказательства должны быть записаны на бумаге и допускать возможность ручной проверки без вычислительных устройств. Компьютерная программа, вычисляющая ответ, доказательством не считается.

1. Даны произвольные числа a, b, c . Докажите, что из трех чисел $a + c - 4b^2$, $a + b - 4c^2$, $b + c - 4a^2$ обязательно найдется такое, которое будет не больше $\frac{1}{4}$.
2. Натуральное число n выбрали случайным образом из отрезка $[1; 2023]$. Найдите вероятность того, что $\text{НОД}(n, 2024) = 1$.
3. В клетчатом квадрате 9×9 отметили все точки, являющиеся вершинами клеток (то есть всего 100 точек). Сколько существует различных квадратов, вершинами которых являются отмеченные точки?
Например, для клетчатого квадрата 2×2 их было бы 6: 4 квадрата со стороной 1, еще 1 квадрат со стороной 2 и еще 1 квадрат со сторонами, проходящими по диагоналям клеточек.
4. Таня любит выписывать последовательности цифр по следующему правилу. Первые 4 цифры она выбирает произвольно, а каждая следующая цифра получается как остаток от деления на 10 суммы четырех предыдущих цифр последовательности. Например, если Таня начнет с 1, 2, 3, 4, то дальше она напишет 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7 и так далее. Сегодня Таня решила начать новую последовательность с цифр 2, 0, 2, 3. Встретится ли когда-нибудь в этой последовательности подряд 2, 0, 2, 3 еще раз?
5. В треугольнике ABC провели биссектрисы, которые разрезали его на 6 треугольников. Периметры всех полученных шести треугольников оказались равны. Докажите, что треугольник ABC – правильный.
6. На клетчатой доске размером 100×100 двое по очереди расставляют цифры: первый – единицы, второй – нули. После того, как вся доска заполняется, считают суммы цифр по столбцам и по строкам. Если хотя бы две из этих сумм нечётны, побеждает первый игрок, в противном случае – второй. Кто выиграет при правильной игре?
7. Натуральное число называется *числом харшад*, если оно делится на сумму своих цифр. Например, такими являются числа 54, 100, 132. Докажите, что в натуральном ряде не может быть 22 подряд идущих чисел харшад.