Третий открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.
Май 2023.
Младшая лига (8 класс).

Каждая задача оценивается из 7 баллов. За неполные решения задач могут ставиться частичные баллы. Ответ без обоснования (даже правильный) всегда оценивается нулем баллов. Все доказательства должны быть записаны на бумаге и допускать возможность ручной проверки без вычислительных устройств. Компьютерная программа, вычисляющая ответ, доказательством не считается.

1. Натуральное число n выбрали случайным образом из отрезка $[1; 2023]$. Найдите вероятность того, что НОД$(n, 2024) = 1$.

2. В клетчатом квадрате 9×9 отметили все точки, являющиеся вершинами клеток (то есть всего 100 точек). Сколько существует различных квадратов, вершинами которых являются отмеченные точки?
Например, для клетчатого квадрата 2×2 их было бы 6: 4 квадрата со стороной 1, еще 1 квадрат со стороной 2 и еще 1 квадрат со стороной $\sqrt{2}$.

3. Таня любит выписывать последовательности цифр по следующему правилу. Первые 4 цифры она выбирает произвольно, а каждая следующая цифра получается как остаток от деления на 10 суммы четырех предыдущих цифр последовательности. Например, если Таня начнет с 1, 2, 3, 4, то дальше она напишет 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7 и так далее. Сегодня Таня решила начать новую последовательность с цифр 2, 0, 2, 3. Встретится ли когда-нибудь в этой последовательности подряд 2, 0, 2, 3 еще раз?

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади $\frac{1}{2}$ оказалось выполнено неравенство $AB + BD + DC \leqslant 2$. Чему может быть равен угол между диагоналями этого четырёхугольника?

5. $OAPB$ – четырехугольник, в котором углы при вершинах A и B прямые, а точка A симметрична точке B относительно диагонали OP. Точка M делит AP пополам, а точка N лежит на отрезке BM так, что $OA = ON$. Докажите, что $PN = 2\,MN$.

6. Натуральное число называется *числом харшад*, если оно делится на сумму своих цифр. Например, такими являются числа 54, 100, 132. Докажите, что в натуральном ряде не может быть 22 подряд идущих чисел харшад.

7. Найдите наибольшее k, при котором для любых чисел x, y, z, таких, что $x + y + z = 0$, выполнено неравенство: $k(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)^3$.

8. Миша выписал на доску числа от 1 до 100 без повторений в произвольном порядке. За ход Илья может поменять местами любые два числа, имеющие разную четность. За какое наименьшее число ходов Илья гарантированно сможет упорядочить все числа по возрастанию?