Третий открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.
Май 2023.
Средняя лига (9 класс).

Каждая задача оценивается из 7 баллов. За неполные решения задач могут ставиться частичные баллы. Ответ без обоснования (даже правильный) всегда оценивается нулем баллов. Все доказательства должны быть записаны на бумаге и допускать возможность ручной проверки без вычислительных устройств. Компьютерная программа, вычисляющая ответ, доказательством не считается.

1. В клетчатом квадрате 9×9 отметили все точки, являющиеся вершинами клеток (то есть всего 100 точек). Сколько существует различных квадратов, вершинами которых являются отмеченные точки?
Например, для клетчатого квадрата 2×2 их было бы 6: 4 квадрата со стороной 1, еще 1 квадрат со стороной 2 и еще 1 квадрат со стороной $\sqrt{2}$.

2. Таня любит выписывать последовательности цифр по следующему правилу. Первые 4 цифры она выбирает произвольно, а каждая следующая цифра получается как остаток от деления на 10 суммы четырех предыдущих цифр последовательности. Например, если Таня начнет с 1, 2, 3, 4, то дальше она напишет 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7 и так далее. Сегодня Таня решила начать новую последовательность с цифр 2, 0, 2, 3. Встретится ли когда-нибудь в этой последовательности подряд 2, 0, 2, 3 еще раз?

3. Для некоторого выпуклого четырёхугольника с длинами сторон (в порядке обхода) a, b, c, d оказалось, что его площадь равна $\sqrt{abcd}$, а также в него можно вписать окружность. Докажите, что тогда около него можно описать окружность.

4. Натуральное число называется *числом харшад*, если оно делится на сумму своих цифр. Например, такими являются числа 54, 100, 132. Докажите, что в натуральном ряде не может быть 22 подряд идущих чисел харшад.

5. Найдите наибольшее k, при котором для любых чисел x, y, z, таких, что $x + y + z = 0$, выполнено неравенство: $k(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)^3$.

6. Пусть $ABCD$ – четырехугольник с непараллельными сторонами. Лучи BA и CD, BC и AD пересекаются в точках P и Q соответственно. Докажите, что середины отрезков PQ, AC, BD лежат на одной прямой.

7. Дан связный граф на n вершинах без петель и кратных ребер. Оказалось, что если выбрать любой цикл в этом графе и удалить все ребра в этом цикле, то граф перестанет быть связным. Какое наибольшее количество ребер может быть в таком графе?

8. Дана клетчатая таблица из n столбцов и m строк, где каждая клеточка покрашена в черный или белый цвет, причем раскраски любых двух строк различаются хотя бы в одной клетке. Назовем множество из n строк *хорошим*, если из этих строк можно в некотором порядке (но без поворотов и отражений) сложить квадрат $n \times n$ так, что его главная диагональ будет одноцветной. При каком наименьшем m можно гарантировать, что в таблице найдется хорошее множество из n строк?