Третий открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.
Май 2023.
Старшая лига (10 класс).

Каждая задача оценивается из 7 баллов. За неполные решения задач могут ставиться частичные баллы. Ответ без обоснования (даже правильный) всегда оценивается нулем баллов. Все доказательства должны быть записаны на бумаге и допускать возможность ручной проверки без вычислительных устройств. Компьютерная программа, вычисляющая ответ, доказательством не считается.

1. Докажите, что $\sin\dfrac{\pi}{30} > 0,1$.

2. Натуральное число называется *числом харшад*, если оно делится на сумму своих цифр. Например, такими являются числа 54, 100, 132. Докажите, что в натуральном ряде не может быть 22 подряд идущих чисел харшад.

3. Найдите наибольшее k, при котором для любых чисел x, y, z, таких, что $x+y+z=0$, выполнено неравенство: $k(x^3+y^3+z^3)^2 \leqslant (x^2+y^2+z^2)^3$.

4. Пусть $ABCD$ – четырехугольник с непараллельными сторонами. Лучи BA и CD, BC и AD пересекаются в точках P и Q соответственно. Докажите, что середины отрезков PQ, AC, BD лежат на одной прямой.

5. Дано число $A = [(1+\sqrt{3})^{2023}]$, где квадратные скобки обозначают взятие целой части. Докажите, что A делится на 2^{1012}, но не делится на 2^{1013}.

6. Дан связный граф на n вершинах без петель и кратных ребер. Оказалось, что если выбрать любой цикл в этом графе и удалить все ребра в этом цикле, то граф перестанет быть связным. Какое наибольшее количество ребер может быть в таком графе?

7. Рассмотрим окружность Ω радиуса 10 с центром в точке O. На расстоянии 1 от точки O выбрали точку A и построили с центром в A окружность γ радиуса r, так что она оказалась целиком внутри окружности Ω, не касаясь ее. Затем построили окружность ω_1, касающуюся обеих предыдущих окружностей: γ внешним образом, Ω внутренним образом. Далее построили цепочку окружностей $\omega_2, \ldots, \omega_6$, где каждая окружность ω_k касается внешним образом предыдущей окружности ω_{k-1} и окружности γ, а внутренним образом – окружности Ω. Оказалось, что окружность ω_6 касается внешним образом также и окружности ω_1. Найдите r.

8. Илья выбрал некоторое множество из n натуральных чисел и выписал на доску в произвольном порядке всевозможные попарные суммы чисел из этого множества (всего оказалось выписано C_n^2 чисел, необязательно различных). Например, для множества $\{1,2,3,4,5\}$ Илья мог написать: $7,7,5,5,3,4,6,8,9,6$. Вася увидел написанные числа и захотел восстановить исходное множество. Докажите, что если n не степень двойки, то Вася однозначно сможет это сделать.