Предполагается, что школьники решают 6 задач за 5 часов подряд с момента открытия олимпиады. Задачи разделов «Лёгкие» предполагают проверку численого ответа. Задачи разделов «Сложные» – проверку развернутого решения.
Во всех задачах с численным ответом точность проверки ответа лучше считать порядка 10% вне зависимости от единиц измерения. Можно давать неполный балл за попадание в ворота 25%.

7 класс

Лёгкие задачи

Задача 1 Десятивагонный состав поезда «Ласточка» длиной 250 м двигаясь равномерно со средней скоростью 54 км/ч. На станции «Деловой центр» человек вбежал в пятый вагон. С какой скоростью ему необходимо двигаться, чтобы выйти из первого вагона на следующей станции «Кутузовская». Считайте, что вход и выход осуществляется через первую дверь в самом начале вагона. Расстояние между станциями 2950 м. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.

Решение:
Выразим 54 км/ч в м/с.

$$54 \text{ км/ч} = 15 \text{ м/с}$$

Расстояние, которое прошел последний вагон поезда:

$$2950 + 250 = 3200 \text{ м}$$

Время, за которое полностью приедет поезд к станции "Кутузовская":

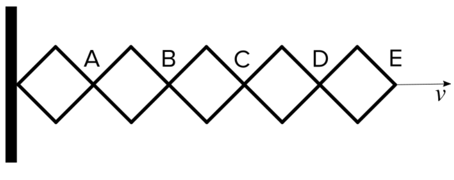
$$3200/15 = \frac{640}{3} \text{ с}$$

Тогда скорость человека, пробежавшего 4 вагона: $\frac{250 \cdot 4 \cdot 3}{640} = 4,7$ м/с.

Задача 2 Полый шарик подвесили на динамометре. Когда его опустили в воду, то динамометр показал $0,22$ Н. Когда опустили в керосин - $0,52$ Н. Определите объём полости в см^3. Плотность воды 1 г/см^3, плотность керосина 0,8 г/см^3, плотность материала шарика 14,8 г/см^3.

Решение:
Для воды: $P_1 = mg - \rho_1 Vg$ (1)
Для керосина: $P_2 = mg - \rho_2 Vg$ (2)
Из (2) выражаем $\rho_1 Vg$=$mg - P_2$ и подставляем в (1), получаем $P_2 - P_1 = \rho_1 Vg - \rho_2 Vg$
Тогда $V = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 g - \rho_2 g} = 150$ см^3
Находим массу шарика из (1). $m = P_1/g + \rho_1 V = 370$ г. Тогда объём материала шарика должен быть $V_s = \frac{m}{\rho} = 25$ см^3.
Вычисляем объём полости: $V_n = V - V_s = 125$ см^3

Задача 3 На рисунке представлена шарнирная конструкция, состоящая из пяти одинаковых ромбов (см. рисунок). Шарниры расположены во всех вершинах ромбов. Определите скорость точки B, если скорость точки E равна 5 м/с.



Решение: Видим, что на рисунке точка A сдвигается на δx, точка B на $2\delta x$, точка E на $5\delta x$. Тогда если скорость точки E v, то точки B будет $\frac{2}{5}v = 2$ м/с.

Сложные задачи

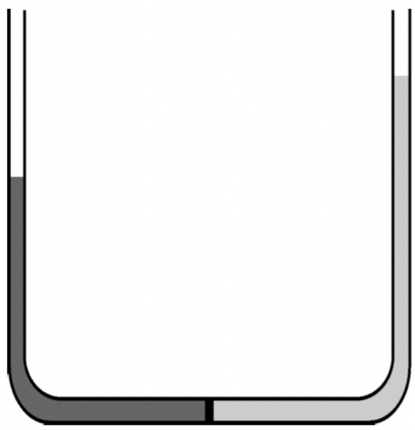
Задача 4 Константин и Семён выехали из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми 360 км. Константин двигался со скоростью 72 км/ч, делая 15 минутные перерывы каждые 2 часа. Семён проспал и выдвинулся на 2 часа позже. В первую половину пути он двигался со скоростью 90 км/ч, затем сделал перерыв час и двинулся со скоростью 80 км/ч.

1. Найдите средние скорости Семёна и Константина.
2. Кто приедет быстрее?
3. Перегнал бы Семён Константина, если бы двигался без остановок?

Ответы обоснуйте.

Решение:
1) Найдем среднюю скорость Константина. Если бы Константин двигался без остановки, то проехал бы расстояние за 5 часов. Значит за это время он сделал 2 остановки. Получается, что время в пути 5,5 часа, тогда средняя скорость 65,5 км/ч.
Найдем среднюю скорость Семёна. Первую половину пути он прошел за $\frac{180}{90} = 2$ часа. Вторую половину пути - за 2,25 часа. Тогда всё время пути с учетом остановки 5,25 часа. Средняя скорость 68,6 м/с.
2) Константин
3) Не перегнал бы. Время движения Констатантина 5.5 часов, время движение Семёна 4.25 часа, но с учетом опоздания, то 6.25 часов.

Задача 5 В открытой U-образной трубке, разделенной тонкой подвижной перегородкой налиты керосин и вода (см.рисунок). Колено с керосином закрывают массивным поршенем, после чего уровень воды, отсчитанный от колена, изменяется в 2 раза. Найдите массу поршня, если площадь сечения трубки 50 см^3, а начальная высота керосина 20 см. Длину колена считайте равным 60 см, а перегородку в начальный момент времени находящейся посередине колена. Плотность воды 1 г/см^3, плотность керосина 0,8 г /см^3.



Решение:
Найдем первоначальный уровень воды в трубке. Обозначим индексом 1 воду, индексом 2 - керосин:

$$\rho_1 h_1 g = \rho_2 h_2 g$$

$$h_1 = 16 \text{ см.}$$

Рассмотрим ситуацию после добавления поршня. Находим сначала изменение уровня воды. Объем жидкости не поменяется, тогда можно записать следующее:

$$Sh_1' = Sh_1 + \Delta hS$$

$$Sh_2' = Sh_2 - \Delta hS$$

Очевидно, что уровень воды увеличится, из условия известно, что в 2 раза. Из записанных соотношений получаем, что $h_2' = h_2 - h_1$

Тогда для давлений получаем следующее:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2(h_2 - h_1)g = 2\rho_1 h_1 g$$

$m = (2\rho_1 h_1 + \rho_2 h_1 - \rho_2 h_2)S = (16 \cdot 2,8 - 20 \cdot 0,8) \cdot 50 = 1440$ г

Задача 6 Пусть на рычажных весах стоят на одной стороне первый m_1 и второй m_2 грузы, а на другой груз массой m_3, то в положении равновесия отношение плечей будет 2:5, длина одной части 1 м. Если убрать второй груз, то для получения положения равновесия точку крепления необходимо сдвинуть на 2 м.

1) Найдите массу первого и третьего груза, если масса второго груза 2 кг

2) Какой массы нужно взять четвертый груз, чтоб изначальная система находилась в равновесии и точка крепления была песередине рычага.

Решение:

1) Пусть $l_1 = 2$ м, $l_2 = 5$. Запишем условия равновесия. По правилу моментов получаем:

$$(m_1 + m_2)l_1 = m_3 l_2$$

$$m_1(l_1 + \Delta l) = (l_2 - \Delta l)m_3$$

Подставляем числа и получаем:

$$2(m_1 + m_2) = 5m_3$$

$$4m_1 = 3m_3$$

Из этой системы получаем: $m_3 = 2m_2 = 4$ кг, тогда $m_1 = 3$ кг

2) Длина всего рычага 7 м. Середина отрезка 3,5 м. Рассмотрим 4 возможных случая.

а) Пусть с одной стороны лежат первый и второй грузы, а с другой третий и четвертый. Тогда условие равновесия:

$(m_1 + m_2)l = (m_3 + m_4)l$

$m_4 = 1$ кг

б) Пусть с одной стороны лежат первый и третий грузы, а с другой второй и четвертый. Тогда условие равновесия:

$(m_1 + m_3)l = (m_2 + m_4)l$

$m_4 = 2$ кг

в) Пусть с одной стороны лежат второй и третий грузы, а с другой первый и четвертый. Тогда условие равновесия:

$(m_2 + m_3)l = (m_1 + m_4)l$

$m_4 = 3$ кг

г) Пусть с одной стороны лежат все три груза, а с другой - четвертый. Тогда условие равновесия:

$(m_2 + m_3 + m_1)l = m_4 l$

$m_4 = 9$ кг

8 класс

Лёгкие задачи

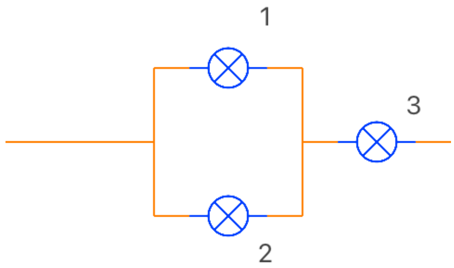
Задача 1 Пятиметровый питон массой 10 кг лежит на гладкой горке. Расстояние по высоте между головой и хвостом 2 м. С какой минимальной силой нужно держать питона за хвост, чтобы он не скатился вниз? Ответ дайте в Ньютонах.

Решение:
Воспользуемся методом виртуальных перемещений $\delta mgh - T\delta x = (mgh/l - T)\delta x$. Тогда $F = \frac{mgh}{l} = \frac{10\cdot 2\cdot 10}{5} = 40$ Н.

Задача 2 Гномик Вася решил принять ванночку объемом 40 л. Он налил некоторое количество холодной воды при температуре 20° и кипятка. Температура полученной смеси оказалась 40° , что показалось Васе горячо. Тогда он слил немного воды и добавил вновь холодной. Сколько всего холодной воды потратил гномик Вася для получения температуры воды 36°? Ответ дайте в килограммах.

Решение: Масса 40 л воды равна 40 кг. Пусть $m_1 + m_2 = m$, где m_1 - масса горячей воды, а m_2 - холодной. Из уравнения теплового баланса для смеси при температуре 40° можно записать следующее выражение:
$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m}$
Подставляя численные значения, получаем $m_2 = 10$ кг.
Аналогично, можно записать для смеси при температуре 36°:
$t' = \frac{m_1' t + m_2' t_2}{m}$
Получем, что масса холодной воды в этом случае $m_2' = 8$ кг. Тогда суммарная масса холодной воды будет: $M = m_2 + m_2' = 18$ кг.

Задача 3 Электрическая цепь состоит из трех лампочек сопротивлениями $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 16$ и $R_3 = 4$(см.рисунок). Какая энергия выделится на третьей лампочке через 5 минут работы? Известно, что мощность второй лампочки 25 Вт. Дайте ответ в кДж.



Решение:
$P_2 = \frac{U_{12}^2}{R} \rightarrow U_{12} = \sqrt{P_2 R} = 20$ В.
Найдем сопртивление двух параллельных лампочек: $R_{12} = \frac{1}{4}$ Ом. Тогда сила тока в цепи $I = U_{12} R_{12} = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$ А. По закону Джоуля-Ленца получаем искомое тепло: $Q = I^2 R t = 25 \cdot 4 \cdot 300 = 3 \cdot 10^4$ Дж $= 30$ кДж.

Сложные задачи

Задача 4 Вовочка взял кастрюлю объемом 3 л с 1 кг льда и 1 л воды. Под кастрюлей он стал сжигать дрова массой 0,5 кг, в результате чего содержимое нагрелось. Какой уровень жидкости в сантиметрах останется в кастрюле после того как сгорят все дрова? Считайте, что на нагрев идет только половина энергии. Дно кастрюли плоское с площадью 200 см^2. Вода хорошо перемешивается.

Табличные данные: плотность воды при $0°C$ $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность воды при $100°$ $\rho_{100} = 960$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость льда $_0 = 2100$ Дж/кг$\cdot°C$, удельная теплоемкость воды $= 4200$ Дж/кг $\cdot°C$, удельная теплота парообразования $L = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота сгорания дров $q = 10 \cdot 10^6$ Дж/кг.

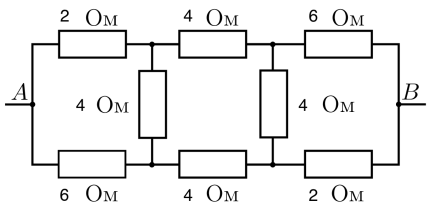
Решение: Из условия видно, что масса воды и льда совпадают и равны 1 кг. Обозначим их m, Δm - масса испарившевся жидкости, а M - масса дров. Запишем уравнение теплового баланса:

$m\lambda + 2m(t_k - t_0)c + \Delta mL = qM$

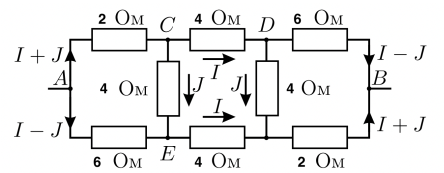
$1 \cdot 34 \cdot 10^4 + 2 \cdot 42 \cdot 10^4 + \Delta m \cdot 230 \cdot 10^4 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1000 \cdot 10^4$

$\Delta m = 0,57$ кг, тогда масса оставшей воды $m' = 2 - 0,57 = 1,43$ кг. Так как вода находится при $100°$, то плотность берем $\rho_{100} = 960$. Тогда уровень жидкости станет: $h = \frac{m'}{rho_{100} = 960 \cdot S} = 0,07$ м $= 7$ см.

Задача 5 Определите общее в Ом сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рисунке.



Решение: Заметим, что рассматриваемая схема симметрична и переходит сама в себя при последовательном отражении относительно вертикальной и затем горизонтальной осей чертежа. Следовательно, токи, текущие через горизонтально расположенные резисторы с сопротивлениями 4 Ома, одинаковы (обозначим эти токи через I). По этой же причине одинаковы токи, текущие через вертикально расположенные резисторы с сопротивлениями 4 Ома (обозначим их через J). Тогда распределение токов в схеме будет таким, как показано на рисунке:



Обозначим напряжение между точками A и B через U. Тогда из закона Ома для участка цепи получим:

Для ACE: $R_1(I + J) + R_2J = R_3(I - J)$

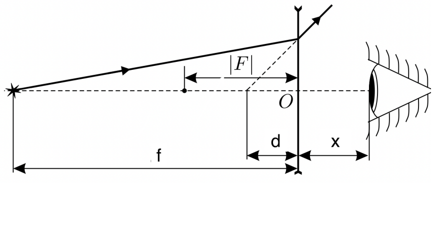
$2 \cdot (I + J) + 4J = 6(I - J) \to J = \frac{I}{3}$

Для ACDB: $R_1(I + J) + R_2I + R_3(I - J) = U \to I = \frac{3U}{32 \text{ Ом}}$

В точку B втекает ток 2I, тогда $R = \frac{U}{2I} = \frac{32U}{6U} = 5,3$ Ом

Задача 6 У близорукого человека стоящего на остановке сползли очки на нос и оказались на расстоянии 1 см дальше от глаз, чем обычно. Руки человека заняты, и он не может поправить очки. На каком максимальном расстоянии в метрах он сможет увидеть свой автобус, если оптическая сила его линз -5 дптр?

Решение: Сделаем рисунок.



Так как $D < 0$, то линза рассеивающая, и формула тонкой линзы будет иметь вид: $-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$
Из этой формулы видно, что $\frac{1}{f} \le \frac{1}{F}$ Так как очки сдвигают фокусное расстояние, то предмет близорукий человек видит, когда он находится не больше чем $F + x$. Тогда если очки сползи, то предмет от глаза должен быть удален так же не более чем $|F| + x$, а изображение от плоскости линзы удалено не более чем на $|F| - l$
$f \ge (F + l)$
Подставляем в фоормулу тонкой линзы и получаем:
$\frac{1}{d} = -\frac{1}{F} + \frac{1}{F+l}$
$d = 16$ м

9 класс

Лёгкие задачи

Задача 1 В болидах формулы 1 в подвеске используют систему состоящую из двух пружин, см. рисунок. Причем короткая её часть имеет заметно меньшую жесткость, чем длинная. Начиная с определенной нагрузки на эту пружину, её жесткость разко изменяется. Найдите отношение жесткостей составной пружины при малых и больших нагрузках, если отношение жесткостей её частей равно $k_s/k_l = 10$.

Решение.
Как видно из картинки, у короткой пружины расстояние между витками достаточно маленькое. Значит, начиная с определенной деформации витки пружины упрутся друг в друга и короткая пружина начнёт вести себя как твёрдое тело. Именно в этот момент жесткость такой системы пружин скачком изменится, так как сжиматься будет теперь только более длинная пружина. Отсюда можно сделать вывод, что при малых нагрузках жесткость составной пружины определяется последовательным соединением пружин, а при больших – жесткостью длинной пружины. Обозначив жесткость малой пружины за k запишем жесткость системы двух пружин при малых нагрузках.

$$k_l = \frac{10k^2}{11k} = \frac{10}{11}k$$

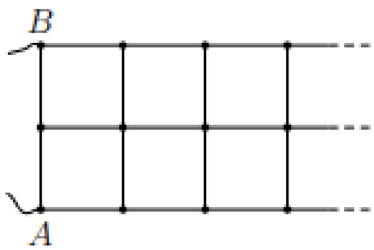
Отсюда искомый ответ равен $\alpha = \frac{10k}{110k} = 0.09$.

Задача 2 Школьник Слава делал лабораторную работу по оптике зимой и собирал оптическую схему. Оптическая схема состоит из собирающей линзы и точечного источника, расположенного на её оптической оси. Расстояние между источником и линзой $d = 1.2$ м, фокусное расстояние линзы $F = 1$ м. В какой-то момент открыли окно и температура в комнате упала, а показатель преломления линзы увеличился на $\delta n = 10^{-4}$. Найдите в см, на какое расстояние сдвинется изображение источника, если начальный показатель преломления материала линзы $n = 1.2$.

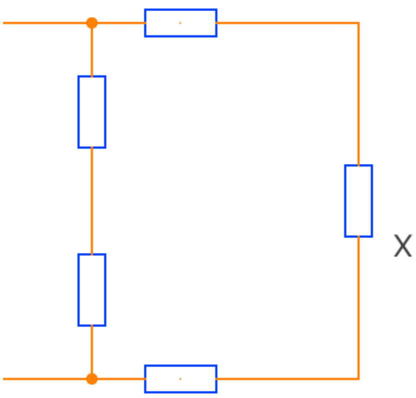
Решение.

Обозначим малое смещение изображения источника через Δf. Уравнение тонкой линзы до изменения температуры $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F_0} = D_0$, а после изменения температуры $\frac{1}{f - \Delta f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F_1} = D_1$. Вычитая эти выражения получим $\frac{1}{f - \Delta f} - \frac{1}{f} = D_1 - D_0$. Так как изменение показателя преломления и смещение изображения малы, $\frac{1}{f - \Delta f} - \frac{1}{f} \approx \frac{\Delta f}{f^2}$. Оптическая сила линзы пропорциональна разнице между показателем преломления материала линзы и показателем преломления среды $D \propto (n_{\text{мат}} - 1)$, поэтому $D_1 - D_0 = \left(\frac{n + \delta n - 1}{n - 1} - 1\right) D_0$. Окончательно находим смещение изображения $\Delta f \approx \frac{\delta n}{n - 1} f^2 D_0 =$ 1.8 см.

Задача 3 Определите сопротивление бесконечной цепи между точками A и B, если сопротивление каждого звена равно $R = 1$ Ом. Ответ дайте в Ом.



Решение.
Из соображений симметрии потенциал посередине между точками A и B будет одинаковым и через средние звенья ток не потечёт. Тогда, эквивалентная схема будет выглядеть как



Здесь резисторами обозначены звенья, а буквой X обозначено сопротивление той же схемы, так как она бесконечна. Вычисляя сопротивление эквивалентной схемы получим

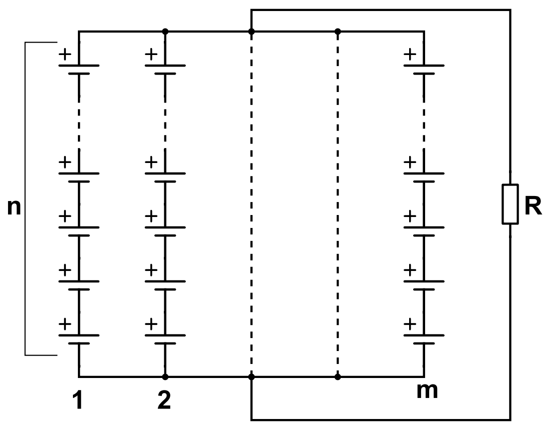
$$R_x = \frac{(R_x + 2R)2R}{R_x + 4R}$$

Решая это уравнение и отбрасывая отрицательный корень получим

$$R_x = R(1 + \sqrt{5}) = 3.24 \text{ Ом}.$$

Сложные задачи

Задача 4
N батареек, внутреннее сопротивление каждой из которых равно r, соединили согласно схеме, показанной на рисунке. n - число батареек в одной линии, а m - число линий.



При каких n и m ток через резистор R будет максимален?

Решение.
Напряжение на клемах «сложного» источника равно $n\varepsilon$. Сопротивление же «сложного» источника $r_0 = \frac{n}{m}r$. Тогда ток через резистор будет равен $I = \frac{n\varepsilon}{R+n/mr}$. Также, $n \cdot m = N$, отсюда ток через резистор будет равен $I = \frac{N\varepsilon}{N/n \cdot R+nr}$. Максимум этого выражения достигается при $n = \sqrt{N\frac{r}{R}}$.

Задача 5 Цилиндрическая пробирка с толщиной стенок d, радиусом $R >> d$ и высотой $H >> R$ стоит на дне аквариума с жестким шероховатым дном. Внутрь аквариума начинают медленно наливать жидкость плотностью ρ, при этом не попадая в пробирку. Плотность материалла пробирки 10ρ При каких условиях пробирка может всплыть? Как изменятся условия, если дно будет мягким?

Решение.
Так как пробирка стоит на шероховатом дне, то под него может затекать вода, значит на пробирку действуют две силы, сила Архимеда и сила тяжести. Сила Архимеда равна $F_A = \rho g H_0 \pi R^2$, где H_0 – высота до которой налита вода, причём $H_0 < H$. С другой стороны на пробирку действует сила тяжести $mg = 10\rho V_1 g$, где V_1 – объем материала, из которого сделана пробирка. Считая стенки тонкими можно пренебречь всеми слагаемыми порядка d^2 и получить, что $V_1 = 2\pi RdH + \pi R^2 d \approx 2\pi RdH$. Отсюда сила тяжести будет равна $mg = 10\rho g 2\pi RdH$. Записав условие плавания тел получим

$$\rho g H_0 \pi R^2 = 10\rho g 2\pi RdH$$

Отсюда можно выразить $H_0 = 20dH/R$. Значит условие на выспплытие пробирки можно записать как $H_0 = 20dH/R < H$, отсюда $R > 20d$. Видно, что условие на стенки выполнится заведомо.
В случае мягкого дна пробирка продавит дно и у воды не будет возможность затечь под пробирку и создать давление снизу, следовательно она никогда не всплывёт.

Задача 6 Прямоугольная призма, в основании которой лежит правильный n-угольник, лежит на наклонной плоскости на своей боковой грани перпендикулярно направлению соскальзывания. При каком значении n призма скатится с наклонной плоскости, если угол наклона плоскости к горизонту равен θ, причем при этом угле призма еще не соскальзывает? Чему должен быть равен коэффициент трения, чтобы ни одна призма не могла соскользнуть ни при каком угле наклона плоскости?

Решение.

Исходя из условия, призма не будет соскальзывать с плоскости. Следовательно, условие скатывания будет заключаться в правильной интерпретации правила моментов. Поскольку для компенсации моментов силы тяжести и силы трения необходимо смещать точку приложения силы реакции опоры ниже по плоскости. Тогда крайняя точка приложения силы реакции опоры перед скатыванием является нижней вершиной стороны многоугольника, которая касается плоскости. Запишем правило моментов относительно точки приложения силы трения (середины стороны). Обозначим как угол $\alpha = \pi/n$ угол между перпендикуляром из центра масс к стороне и прямой, соединяющей центр масс и вершину, примыкающую к этой стороне.

$$Na/2 - mga/2\cos\alpha = 0$$

Исходя из равенства сил, получим что $N = mg\cos\theta$. Тогда условие скатывания примет вид

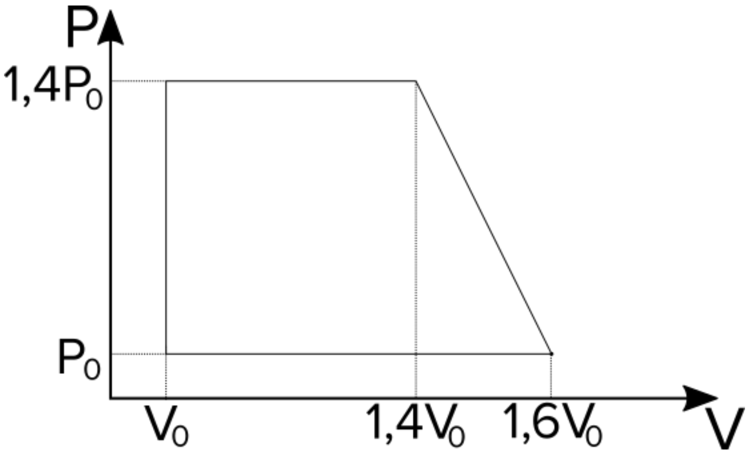
$$\cos\theta = \cos(\pi/n)$$

Отсюда, $n > \pi/\theta$.
Условие соскальзывания можно получить исходя из равенства сил, при условии того что сила трения равна силе трения скольжения $F_{\text{тр.}} = \mu N$. Записав их получим $\operatorname{tg}\theta > \mu$. В условии требуется чтобы ни одна призма не могла соскользнуть, для этого необходимо чтобы условие соскальзывания выполнялось для любого $n > 2$, так как правильный многогранник не может иметь меньше 3 сторон. Отсюда $\theta > \pi/3$. Следовательно ответ будет равен $\mu = \operatorname{tg}\pi/3 = \sqrt{3} > 1$. Отсюда можно заметить, что для обычных поверхностей треугольная призма всегда соскользнёт раньше, чем скатится.

10 класс

Задача 1 Один моль идеального одноатомного газа является рабочим телом тепловой машины и участвует в циклическом процессе. Сначала газ нагревается при постоянном объеме, при этом температура увеличивается на 40% . Затем происходит нагрев и расширение газа при постоянном давлении, при котором температура увеличивается в 1.4 раза. При последующем изменении состояния газа его объем увеличивается еще на 20% , а давление уменьшается до первоначального значения, при этом зависимость $p(V)$ — линейная. Затем газ при постоянном давлении возвращается в исходное состояние. Чему равен КПД процесса?

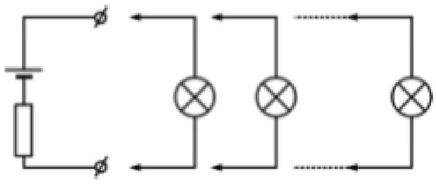
Решение.
Нарисуем на PV-диаграмме цикл.



Здесь учтено, что при изохрном нагреве относительное изменение температуры равно относительному изменению давления, а при изобраном нагреве – отосительному изменению объема.
КПД процесса η можно найти как отношение площади заключенной внутри цикла и площади, под графиками тех участков, где подводили тепло.
Отсюда получим КПД

$$\eta = \frac{(1.4+1.6)/2V_0 \cdot 0.4P_0}{(1.4+1.6)/2V_0 \cdot 0.4P_0 + 0.6P_0V_0} = 0.5$$

Задача 2 Девушка Анна решила сделать гирлянду своими руками. Для этого Анна взяла батарейку, которую можно представить как источник с некоторым внутренним сопротивлением, и присоедниняет к ней параллельно лампочки гирлянды. Анна заметила, что мощность, выделяемая на лампочках при присоединении одной лампочки и четырёх лампочек оказалась одинаковая и равная $N = 1$ Вт. Какая мощность будет выделяться, если Анна соберет гирлянду из 15 лампочек? Ответ дайте в Вт.



Решение.
Обозначим R – сопротивление лампочки, а R_0 – внутреннее сопротивление источника. Тогда мощность, выделяемую на n лампочках, запишем как

$$P_n = U_n^2/R_n = nU_n^2/R,$$

где $R_n = R/n$ – сопротивление параллельно соединенных n лампочек. Исходя из равенства токов найдём напряжение U_n:

$$U_n/R_n = (\mathscr{E} - U_n)/R_0$$

Отсюда получим

$$U_n = \frac{\mathscr{E}}{1 + nR_0/R}$$

Тогда, поставив в выражение для мощности получим

$$P_n = \frac{\mathscr{E}^2}{R}\frac{n}{(1+nR_0/R)^2}$$

Прировняв P_1 и P_4 найдём что $R_0/R = 1/2$. Выразим, P_n через $P_1 = P$

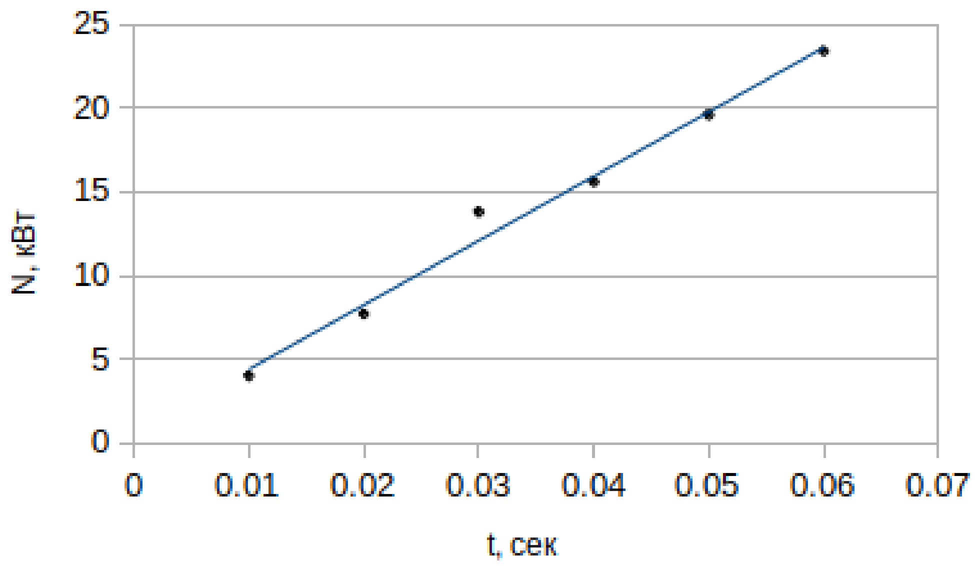
$$P_n = P\frac{9n}{(n+2)^2}$$

Тогда, ответ на вопрос задачи равен $P_{15} = 1.11$ Вт.

Задача 3 При испытании спортивного двигателя, разрабатываемого компанией MIKS в центре Сколково, измерялась мощность вращения вала как функция времени. По расчётам инженеров компании MIKS, крутящий момент этого двигателя в исследумом режиме должен быть примерно постоянным. В таблице приведены измерения мощности как функция времени, однако на одной из точек испытательный стенд выдал неправильное значение. Найдите значение крутящего момента и дайте ответ в Н·м с точностью до десятых. Момент инерции вала равен $I = 4 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

N, кВт	4.0	7.7	13.8	15.6	19.6	23.4
t, с	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06

Решение.
Для постоянного момента сил их мощность можно выразить как $N = M\omega = M\varepsilon t = M^2/It$, где угловое ускорение было выражено из уравнения $I\varepsilon = M$. Отсюда видно, что крутящий момент можно найти исходя из углового наклона зависимости мощности от времени. Построим график мощности от времени



Видно, что точка на 0.03 секундах выбивается, следовательно построив прямую по остальным точкам получим, что $M^2/I = 390$ кВт/с. Отсюда крутящий момент $M = 9$ Н·м.

Сложные задачи

Задача 4 $N = 3141$ упругий маленьких шариков попадает в упругую сферическую оболочку. Начальная энергия каждого шарика – $E = 80$ Дж. Считайте что после попадания в сферическую оболочку шарики из нее не вылетают. Чему будет равен радиус оболочки в равновесии, если при увеличении её площади на 1 см^2 энергия упругой деформации оболочки увеличивается на $\sigma = 5$ Дж.

Решение.
Поскольку количество шариков достаточно велико и попадают они в оболочку случайным образом, то для оценки давления можно использовать приближения молекулярно кинетической теории. Тогда, записав основное уравнение МКТ через энергию можно получить

$$P_b = 2/3nE$$

где концентрацию шариков можно найти по определению $n = N/V = 3N/4\pi R^3$, а средняя энергия известна. Отюсда давление равно

$$P_b = \frac{NE}{2\pi R^3}$$

Это дополнительное давление будет компенсироваться растяжением оболочки. Совершим виртуальное увеличение радиуса оболочки на очень малую величину δR, чтобы найти какое дополнительное давление будет оказывать облочка из-за её растяжения.

$$P2\pi R^2\delta R - \sigma 2\pi[(R+\delta R)^2 - R^2] \approx P2\pi R^2\delta R - \sigma 4\pi R\delta R = 0$$

где σ – дополнительная энергия создаваемая из-за увеличения на единицу площади. Отсюда давление, создаваемое облочкой радиуса R равно $P = 2\sigma/R$.
Два найденных давления в равновесии будут компенсировать друг друга.

$$\frac{NE}{2\pi R^3} = 2\sigma/R$$

Отсюда, искомый радиус равен $R = \sqrt{\frac{NE}{4\pi\sigma}} = 20$ см.

Задача 5 Мягкий маленький мешочек песка скользит по гладкому полу со скоростью $v = 10$ м/с и ударяется о наклонную шероховатую плоскость, коэффициент трения скольжения мешка по которой равен $\mu = 0.4$, а угол наклона этой плоскости к горизонту $\theta = 45°$. На какую высоту поднимется мешочек?

Решение. Рассмотрим удар мешочка о наклонную плоскость. В процессе соударения перпендикулярная плоскости компонента импульса p_y теряется полностью, а из-за наличия трения горизонтальная компонента импульса p_x уменьшится. Запишем изменение перпендикулярной компоненты импульса

$$\Delta p_y = p_t = \int N(t)dt,$$

где N – сила реакции опоры, а интегрирование производится по времени соударения. С другой стороны изменение вертикальной компоненты импульса можно выразить как

$$\Delta p_x = \int F_{\text{тр.}} dt,$$

где изменение импульса создаётся импульсом силы трения. Вспомнив закон Амонтона-Кулона $F_{\text{тр.}} = \mu N$ и подставив в предыдущее выражение, получим

$$\Delta p_x = \int \mu N dt = \mu p_y.$$

Отсюда, конечный импульс мешочка будет равен

$$p_{\text{кон.}} = p_x - \mu p_y = p\cos\theta - \mu p \sin\theta = mv(1-\mu)/\sqrt{2}$$

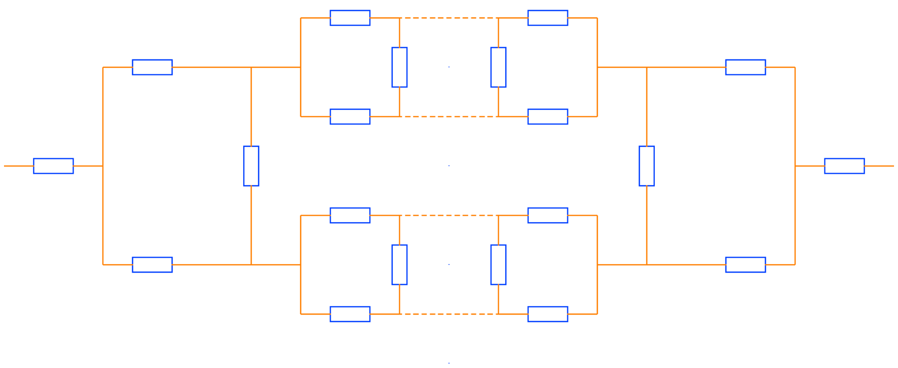
Запишем закон сохранения энергии, пренебрегая перемещением мешочка за время столкновения, $\frac{p^2_{\text{кон.}}}{2m} = mgH + \mu mg\cos\theta H/\sin\theta = mgH + \mu mgH = (1+\mu)mgH$. Используя выражение для конечного импульса мешочка, получим

$$\frac{v^2(1-\mu)^2}{4} = (1+\mu)gH$$

Отсюда высота подъема равна

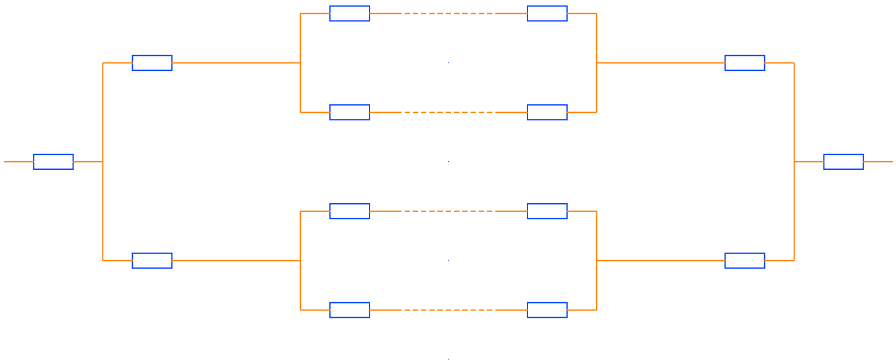
$$H = \frac{v^2(1-\mu)^2}{4(1+\mu)g} = 17 \text{ см}$$

Задача 6 Экспериментатор Даня купил бесконечный набор резисторов, причём оказалось что для напряжений ниже $U_0 = 2$ В их сопротивление еще можно считать постоянным и равным $R = 1,5$ Ом, то при большем диапазоне изменения значения напряжения уже нет и оно описывается квадратичной зависимостью $I = U^2/RU_0$. Даня собрал бесконечную схему, которую вы видите на рисунке. Какая будет вольт-амперная характеристика такой схемы?



1. Если подаётся напряжение меньше $U_0 = 2$ В
2. Для произвольного напряжения на клемах.

Решение.
В силу симметрии схемы через вертикальные резисторы ток течь не будет и их можно исключить из рассмотрения. Тогда эквивалентная схему будет выглядеть как



На каждом из ветвлений ток будет делиться пополам, поскольку элементы одинаковы. Тогда, напряжение на n-ном резисторе можно вычислить как $U_n = IR/2^n$ в первом случае, и как $U_n = \sqrt{RU_0I/2^n}$ во втором.
Напряжение на всей схеме можно посчитать как $U = 2(U_1 + U_2 + U_3 + ...)$. Что в первом случае приводит к

$$U = 2IR(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...) = 4IR.$$

А во втором случае

$$U = 2\sqrt{RU_0I}(1 + 1/\sqrt{2} + (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^3 + ...) = 2\sqrt{RU_0I}\sqrt{2}/(\sqrt{2} - 1).$$

Соответственно, в первом случае ВАХ останется линейной, причем сопротивление равно $4R$. А во втором случае ВАХ останется квадратичным, зависимость которой будет выглядеть как

$$I = \frac{U^2(3 - 2\sqrt{2})}{8RU_0}.$$