Задача 1.

1) Всего число A можно получить 9 * 8 * 7 / 6 = 84 способами, т.к. три цифры можно выбрать 9 * 8 * 7 способами, при этом каждые 6 троек при сортировке дадут одно и то же число A (н-р, наборы 123, 132, 213, 231, 312, 321 дадут число 321). Аналогично, B можно получить 8 * 7 * 6 / 6 = 56 способами. Всего возможных различных пар A и B 84 * 56 = 4704
2) Пусть A1 – множество всех возможных значений A, B1 – множество всех возможных значений B. Заметим, что B1 – подмножество A1, а область A1, не входящая в B1, включает в себя только числа, в которых есть цифра 9, т.е. большие 899, а значит, и большие любого числа множества B1.Таких чисел 8 * 7 / 2 = 28. Все остальные числа множеств A1 и B1 совпадают.
3) Пусть c(B) – количество чисел из множества A1, больших заданного B. Тогда c(876) = 28. Т.к. числа множества A1, не большие 876, совпадают с числами множества B1, можно вывести несложную закономерность: c(B1(n)) = c(B1(n + 1)) + 1, где B1(n) – число B под номером n в отсортированном множестве B1. Тогда, т.к. количество чисел в B1 = 56, c(123) = 28 + 56 – 1 = 83. Тогда всего возможных пар A и B, где A > B,
(28 + 83) * 56 / 2 = 3108.
4) P = 3108/4704 * 100% = 66,07%

Задача 2.

1) Пусть в баню пришли n пар, знакомых каждая с каждой. Тогда все женщины пойдут в одну комнаты, а каждый мужчина – в свою отдельную, понадобится n+1 комната.
2) Уберем знакомство между некоторыми двумя парами. Теперь женщинам понадобится одна лишняя комната, однако два незнакомых между собой мужчины могут перейти в одну комнату, освободив вторую. Убирая очередное знакомство, нам необходимо добавить не более одной комнаты для женщин, но при этом для мужчин будет требоваться на одну комнату меньше. Таким образом, количество занимаемых комнат с удалением очередного знакомства увеличиваться не будет.
3) Заметим, что в некоторых случаях есть возможность обойтись меньшим, чем n+1, количеством комнат. Например, если мы расставим четное число пар по кругу, при этом каждая пара будет знакома только со своими соседями, то и понадобится всего n комнат. Однако всегда существует, например, первоначально рассмотренная ситуация (каждая пара знакома с каждой), в которой требуется ровно n+1 комнат, а т.к. по условию учитывать надо все возможные ситуации, то и обойтись n комнатами нельзя.
4) Тогда в 2022 комнаты может поместиться 2021 пара.

Ответ: 2021

Задача 3.

1) Очевидно, что при n = 1 выражение выполняется, т.к. 1 кратно 1.
2) Натуральная степень 2 всегда четное число, то есть левая часть выражения всегда нечетная, а значит, и n нечетное.
3) Любое натуральное число, большее двух, имеет простые множители. Пусть n > 2 и его минимальный простой множитель равен p, p > 2. Тогда:
   1. $2^{n-1} = -1(\mathrm{mod}\ n)$, $2^{n-1} = -1(\mathrm{mod}\ p)$, $2^n = -2(\mathrm{mod}\ p)$
   2. $2^{p-1} = 1(\mathrm{mod}\ p)$(по малой теореме Ферма), $2^p = 2(\mathrm{mod}\ p)$

   Пусть n = pt.

   $2^{pt}+2^p = 0(\mathrm{mod}\ p)$

   $2^p(1 + 2^t) = 0(\mathrm{mod}\ p)$

   $2^t=-1(\mathrm{mod}\ p)$

   С другой стороны, из тех же равенств 1 и 2

   $2^{pt} = (2^p)^t$, т.е. т.к. $2^p = 2(\mathrm{mod}\ p)$ остатки от деления на p у 2^{pt} и 2^t равны, т.е. $2^t=-2(\mathrm{mod}\ p)$

4) То есть с одной стороны $2^t=-1(\mathrm{mod}\ p)$, а с другой $2^t=-2(\mathrm{mod}\ p)$, что невозможно при p > 2. Противоречие.
5) Следовательно, $2^{n-1}+1$ кратно n только при n = 1.

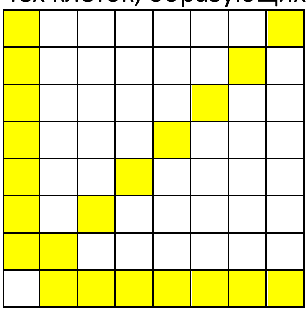
Задача 5.

1) Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 9/16xy = 1$ – это уравнение эллипсоида вращения, значения всех трех переменных по модулю меньше 2.
2) Пусть $y = x+a$, $z = x + b$, где a, b – действительные числа.
3) $x^2 + y^2 + z^2 + 9/16xy = 3\frac{9}{16}x^2 + 2\frac{9}{16}ax + 2bx + a^2 + b^2 = 1$
   $xy+yz+xz = 3x^2 + 2ax + 2bx + ab = n$
   $\frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{16}ax + a^2 + b^2 - ab = 1 - n$
   $1 - \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{16}ax - a^2 - b^2 + ab = n$
   Максимальное значение достигается при a <= 0, a b, x >= 0. При этом и модуль, а и b должен быть как можно меньше.
4) Наименьший модуль при a и b = 0. Тогда $x^2 + y^2 + z^2 + 9/16xy = 3\frac{9}{16}x^2 = 1$,
   откуда $xy+yz+xz = 3x^2 = \frac{48}{57} = 0{,}842$, что и будет ответом.

Ответ: 48/57

Задача 6.

1) Решим задачу в общем для квадратов n* n, n > 1. Выберем в таблице угол и раскрасим все клетки начинающихся из него столбца, строки и главной диагонали за исключением этой угловой клетки. Получается нечто вроде такого (показан только угол квадрата), здесь нет 4ех клеток, образующих прямоугольник.

   Раскрашено 3n-3 клетки.
2) Покажем, что раскрасить больше клеток не получится.
   Для каждой отмеченной клетки в ее строке или в ее столбце не больше одной отмеченной клетки (за исключением рассматриваемой). Тогда можно отметить не более 2(n – 1) + n – 1 = 3n – 3 клеток. Добивается максимальная раскраска способом, описанным в пункте 1. Добавить еще одну клетку, удовлетворяя при этом условию, невозможно.
3) Для n = 57 ответ = 57 * 3 – 3 = 168.

Ответ: 168

Задача 7.

1) Общеизвестно, что методом двоичного поиска можно угадать натуральное число от 1 до M за $\lfloor log_2 M \rfloor$ вопросов. Тогда, чтобы однозначно узнать правду, нужно каждый вопрос задать по крайней мере $\lfloor cn \rfloor$ + 1 раз, где n – количество вопросов.
2) То есть $n = \lfloor log_2 M \rfloor(\lfloor cn \rfloor + 1)$.
   $\frac{n}{\lfloor log_2 M \rfloor} - 1 = (\lfloor cn \rfloor)$
   с максимально при $cn = \lfloor cn \rfloor + 0,(9)$
   $\frac{n}{\lfloor log_2 M \rfloor} > cn$
   $\frac{1}{\lfloor log_2 M \rfloor} > c$
   То есть с стремится к $1/\lfloor log_2 M \rfloor$

Ответ: это возможно при с стремящемся к $1/\lfloor log_2 M \rfloor$. В таком случае можно воспользоваться бинарным поиском, в каждом вопросе уточняя все исходы, возможные в предыдущих вопросах.