№1

Для начала посчитаем кол-во пар, где I число – трёхзначное, составленное из различных цифр от 1 до 9 в порядке убывания, а II – трёхзначное, составленное из различных цифр от 1 до 8. И кол-во таких пар равно кол-во I · кол-во II (это можно понять, т.к. для каждого числа из I мы можем составить все из II).

Кол-во составить I: если 1-я цифра 9:

2-я – 8, есть 7 вариантов; 2-я – 7, есть 6 вариантов, 2-я 6, есть 5 вариантов...

2-я 2, есть 1 вариант. Всего $1+2+\ldots+7=\frac{7\cdot 8}{2}=28$

Если 1-я цифра 8:

2-я 7, есть 6 вариантов ... то же что и выше 2-я 2, есть 1 вариант. Всего

$1+2+\ldots+6=\frac{6\cdot 7}{2}=21$

Если 1-я цифра 7: то же самое Всего $1+2+\ldots 5=\frac{5\cdot 6}{2}=15$

2-я 6, есть 5 вариантов ...

Аналогично, если 1-я цифра 6: $1+2+3+4=10$

Если 1-я цифра 5: $1+2+3=6$

Если 1-я цифра 4: $1+2=3$

Если 1-я цифра 3: 1

Всего: $1+3+6+10+15+21+28$ ... такое же, только надо убрать

...логично, что для II числа кол-во ... если I-я цифра 9, т.е.

Если 1-я цифра 3: 1

Всего: $1+3+6+10+15+21+28$

Логично, что для II числа кол-во такое же, только надо убрать кол-во вариантов то же, что и для I за исключением, если I-я цифра 9, т.е.:

$1+3+6+10+15+21$

Значит, всего кол-во рассматриваемых исходов:

$(1+3+6+10+15+21+28)(1+3+6+10+15+21)$

Теперь посчитаем кол-во удачных исходов:

Если 1-я цифра I числа ~~был~~ 9, то это число обязательно больше II

Всего таких исходов: $\underbrace{28}_{\text{кол-во I числа, где I цифра 9}}\cdot\underbrace{(1+3+6+10+15+21)}_{\text{кол-во II чисел}}$ (1)

Если 1-я цифра I числа 8, то это число больше II чисел, где I-я цифра 7 и меньше. Таких вариантов: $21\cdot(1+3+6+10+15)$

(по тому же принципу, что и (1))

Также рассмотрим благоприятные исходы, когда у обоих чисел 1-я цифра 8:

876 больше всех чисел кроме 876, т.е. больше 20 чисел $(21-1=20)$

875 больше всех кроме 876 и 875, т.е. 19 чисел $(21-2=19)$

... далее все аналогично

831 больше ~~всех~~, чем 821, т.е. 1

821 больше 0 чисел

Всего таких вариантов: $\frac{20\cdot 21}{2}=210$

В сумме: $210+21\cdot(1+3+6+10+15$ ~~...~~$)$

Если 1-я цифра I числа 7, то если 1-я цифра II числа 6 и меньше, то таких исходов: $15\cdot(1+3+6+10)$

Если у обоих чисел 1-я цифра 7, то:

I число	кол-во благоприятн. исходов
765	больше всех чисел, кроме 765, т.е. 14
764	больше всех, кроме 765 и 764, т.е. 13
...	
731	1
721	0
Всего	$\frac{14\cdot 15}{2} = 105$

Значит, таких благоприятных исходов: $105+15\cdot(1+3+6+10)$

Если 1-я цифра I числа 6, то кол-во благоприятных исходов:

общее кол-во таких I чисел

$\frac{9\cdot 10}{2} + 10\cdot(1+3+6) = 45+10\cdot(1+3+6)$ (по аналогии с предыдущим)

Если 1-я цифра I числа 5, то кол-во благоприятных исходов:

$\frac{5\cdot 6}{2} + 6\cdot(1+3) = 15+6\cdot(1+3)$

Если 1-я цифра I числа 4, то кол-во благоприятных исходов:

$\frac{2\cdot 3}{2} + 3\cdot 1 = 3+3 = 6$

... исходов нет.

Если 1-я цифра 3: 1

Всего: $1+3+6+10+15+21+28$

Логично, что для II числа кол-во такое же, только надо убрать кол-во вариантов то же, что и для I за исключением, если II-я цифра 9, т.е.:

$1+3+6+10+15+21$

Значит, всего кол-во рассматриваемых исходов:

$(1+3+6+10+15+21+28)\cdot(1+3+6+10+15+21)$

Теперь посчитаем кол-во удачных исходов:

Если 1-я цифра I числа ~~бол~~ 9, то это число обязательно больше II

Всего таких исходов: $\underbrace{28}_{\text{кол-во I числа, где I цифра 9}}\cdot\underbrace{(1+3+6+10+15+21)}_{\text{кол-во II числа}}$ (1)

Если 1-я цифра I числа 8, то это число больше II чисел, где I-я цифра 7 и меньше. Таких вариантов: $21\cdot(1+3+6+10+15)$ (по тому же принципу, что и (1))

Также рассмотрим благоприятные исходы, когда у обоих чисел 1-я цифра 8.

876 больше всех чисел кроме 876, т.е. больше 20 чисел $(21-1=20)$

875 больше всех кроме 876 и 875, т.е. 19 чисел $(21-2=19)$

... далее все аналогично

831 больше ~~всех~~, кроме 821, т.е. 1

821 больше 0 чисел

Всего таких вариантов: $\frac{20\cdot 21}{2} = 210$

В сумме: $210 + \cancel{21}\cdot(1+3+6+10+15\ \cancel{\ldots})$

N5.

$AO \cap CH = K$

S - середина AK

B' - середина AC

~~т.к.~~ AH и AO - изогонали $\angle A$ и т.к. $\angle ABH = \angle ACH$, то ~~т.к.~~ $\frac{BP}{AB} = \frac{CQ}{AC}$ и из подобия

$\triangle AKC \sim \triangle AHB$ ~~тогда~~ ~~т.к.~~

и т.к. M и S середины соответств. сторон, что:

$\angle PMB = \angle QSC$

Докажем, что SMCQ - вписанный.

$B'S \cdot B'M \stackrel{?}{=} B'Q \cdot B'C$

В $\triangle QOC$: несложно понять из счета углов, что:

$\angle QOC = \beta + \gamma - 90^\circ$ $(\alpha, \beta, \gamma$ - соответств. углы большого треуг.). По теор. синусов $CQ = \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sin\gamma \cdot R} \Rightarrow$

$B'Q = \frac{AC}{2} - \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sin\gamma \cdot R}$

Из счёта углов несложно понять, $\angle AKC = 180^\circ - \alpha - \beta$.

и $\angle KOC = 180^\circ - 2\beta$

Тогда $CK = \frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha+\beta) \cdot R}$ Аналогично $CH =$

$= \frac{AC}{\sin(\alpha+\gamma) \cdot \cos\gamma}$. Тогда $B'S \cdot B'M = B'Q \cdot B'C$

№3.

$2^{n-1}+1$. Заметим, что $n=2$ не подходит, т.к. $2^{2-1}+1=3 \not\vdots 2$, также т.к. $2^{n-1} \vdots 2$ и $2^{n-1}+1 \not\vdots 2$, то n четное тоже быть не может.

По МТФ $2^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{p-1}+1 \underset{p}{\equiv} 2$, а т.к. $p \neq 2$, то

$2^{p-1}+1 \not\vdots p$

Если $n=kp$, то $2^{kp-1}=2^{(k-1)p} \cdot 2^{p-1} \underset{p}{\equiv} (2^{k-1})^p$ (по МТФ)

$(2^p)^{(k-1)} \underset{p}{\equiv} 2^{(k-1)}$ т.к. $2^p \underset{p}{\equiv} 2$ (следствие из МТФ)

$2^{n-1}+1 \underset{p}{\equiv} 2^{k-1}+1$

$\cancel{(2^{p-1})^{(k-1)} \cdot 2^{p+k}}$

Это должно быть сравнимо с 0 по модулю p, при этом k - не простое

$2^{p_1p_2-1} \equiv (2^{p_1})^{(p_2-1)} \cdot 2^{(p_1-1)} \underset{p_2}{\equiv} 1 \cdot 2^{(p_1-1)}$. Но т.к. $p_2 \not\vdots 2^{(p_1-1)}$, то невозможно, что $\vdots n$

$2^{p_1p_2p_3-1} \equiv (2^{p_1p_2})^{(p_3-1)} \cdot 2^{p_1p_2-1} \underset{p_3}{\equiv} 1 \cdot 2^{p_1p_2-1}$

В любом случае ~~т.к.~~ $\not\vdots p_3$, но т.к. $n \vdots p_3$, то выражение $\not\vdots p_3 \Rightarrow$ невозможно

Аналогично мы для любого кол-ва простых не получимся $\Rightarrow$ дп.к. любое число >1 раскл. на простые множители, то число >1 не подходит. Подходит лишь 1, действительно, $2^{1-1}+1 \vdots 1$

Ответ: 1

№2.

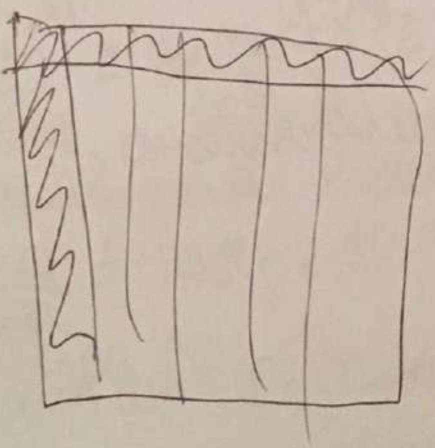
У нас есть полный граф на k вершинах. Берём граф женщин и накладываем на полный граф. И убираем женщин, оставшиеся рёбра — рёбра, которые возникнутся 2 раза, оставшиеся граф мужчин. Те ребра мужчины, которые не соединены Они не знакомы и их можно посадить в 1 комнату. Те женщины, которые соединены ребром, их тоже можно посадить в 1 комнату

Докажем, что 2022 и больше быть не могут. Действительно, если все со всеми знакомы, то каждый мужчина должен в отдельной комнате, т.е. уже затрачена минимум 2022 комнаты + 1 комната нужна для женщин. Противоречие

№5.

Ответ: 113.

Пример:



13.