№1

Всего чисел, полученных первым способом $C_9^3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = 84$, а чисел, полученных вторым способом $C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$

Посчитаем количество пар чисел A (1 способ) и B (2 сп.) таких, что $A > B$.

1) Пусть при составлении A „9" использовалась. Тогда A это 9•• (2 какие-то цифры вместо •). Т.к. число B начинается не более чем на „8", то $A > B$. Таких чисел A $C_8^2 = 28$ (из цифр кроме 9 берём 2), и чисел B – 84. Значит пар $28 \cdot 84$.

2) Пусть в числе A нет 9. Тогда число A выбирается так же, как B. Тогда из симметрии выбора случаев, когда $A > B$ и когда $B > A$ поровну. Т.к. кол-во чисел B это 56, то $A \neq B$ в $56^2 - 56$ случаях ($56 \cdot 56$ – кол-во пар, 56 – кол-во пар, где $A = B$).

Тогда $A > B$ в $\frac{56^2 - 56}{2}$ случаях.

Значит всего $28 \cdot 84 + \frac{56^2 - 56}{2}$ пар (где $A > B$)

Тогда искомая вероятность это

$$\frac{28 \cdot 84 + \frac{56^2 - 56}{2}}{84 \cdot 56} = \frac{3892}{4704} = \frac{1946}{2352} = \frac{973}{1176} =$$

$$= \frac{139}{168} = \cancel{\frac{139}{168}}$$

($84 \cdot 56$ – кол-во всех пар чисел A и B)

Ответ: $\frac{139}{168}$

№2

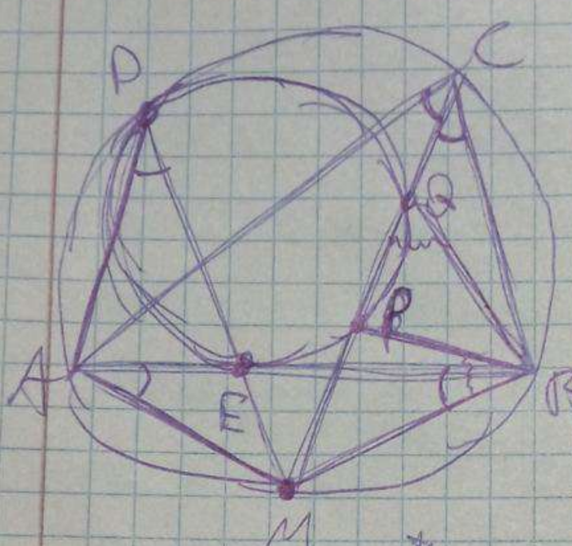
Начнём последовательность числом 2.

Пусть у нас есть последовательность разл. нат. (кроме 1) чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$, для которой любые 2 соседних числа не являются взаимнопростыми (например для $n=1$ это 2). Пусть X — наименьшее натуральное число кроме 1, которого нет в последовательности, M — наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Добавим в последовательность число $a_n \cdot X \cdot M$ и число X. Числа X не было в последовательности, число $M \cdot X \cdot a_n$ больше чем любое число в последовательности и $> X$ ~~поэтк~~. Поэтому члены последовательности не повторяются. При этом $НОД(a_n, M \cdot X \cdot a_n) = a_n > 1$, $НОД(X, M \cdot X \cdot a_n) = X > 1$.

Значит мы всегда можем продлить последовательность и каждое натуральное число (кроме 1) окажется в ней (т.к. нат. (кроме 1) чисел, меньших чем оно конечное число), то мы получим бесконечную последовательность из всех нат. чисел кроме 1 (мы для каждого такого числа знаем место, в котором оно будет стоять). Ответ: да

№3



Пусть D — точка касания Ω с Γ, E — точка касания Ω с AB, M — середина дуги AB окр Γ. Тогда C, P, Q, M — на одной прямой (на биссектрисе)

По лемме Архимеда D, E, M лежат на одной прямой (н-р это можно доказать т.к. E переходит в M при гомотетии с центром в D, которая переводит Ω в Γ)

Будем обозначать $\measuredangle(XY; ZT)$ направленный против часовой стрелки угол ~~между~~ от прямой XY к ZT.

Т.к. CM — биссектриса, то $\measuredangle(CA; CM) = \measuredangle(CM; CB)$.

Т.к. A, B, C, M, D на одн. окр. то $\measuredangle(AD; DM) = \measuredangle(AC; CM) = \measuredangle(AB; BM) = \measuredangle(MC; CB) = \measuredangle(MA; AB)$.

~~Тогда~~ Будем обозначать (XYZ) — опис окр $\triangle XYZ$.

Тогда (DAE) кас. AM, т.к. $\measuredangle(AD; DE) = \measuredangle(MA; AE)$ (угол между хордой AE и предпол. касательной AM)

SHOT ON REDMI 9
AI QUAD CAMERA

Тогда $MA^2 = ME \cdot MD$ (т.к. кас. равн. произв. отр. сек. или степень точки M)

Но $ME \cdot MD = MP \cdot MQ$ — ст. точки M отн. Ω

Т.к. $MA = MB$, то $MB^2 = MP \cdot MQ$. Тогда (BPQ) кас. MB. Тогда $\measuredangle(PQ; QB) = \measuredangle(PB; MB)$.

При этом $\measuredangle(PC; CB) + \measuredangle(CB; QB) = \measuredangle(PC; QB) = \measuredangle(PB; MB) = \measuredangle(PB; BA) + \measuredangle(AB; MB)$.

Значит $\measuredangle(PC; CB) + \measuredangle(CB; BQ) = \measuredangle(AB; MB) + \measuredangle(PB; AB)$, то т.к. $\measuredangle(PC; CB) = \measuredangle(AB; MB)$, то $\measuredangle(CB; QB) = \measuredangle(PB; AB)$.

Т.к. точки P и Q по одну сторону от AB, то $\angle CBQ = \angle PBA$.

Ч.т.д.

№9

Заметим, что если $k \geq 2022$ и все мужчины знакомы между собой, то для мужчин необходимо хотя бы $k \geq 2022$ компаний и для женщин ещё одна. Итого $k+1 \geq 2022+1 = 2023 > 2022$.
Поэтому искомое $k \leq 2021$.
Осталось доказать, что если нам дан граф на k вершинах, то его и его дополнение до полного можно разбить суммарно не более чем на $k+1$ полный подграф. Это можно доказать по индукции (один граф – граф знакомств женщин, а другой – граф незнакомств мужчин).
Ответ: 2021.

№5

Докажем, что если Визирь перевернёт центральный напёрсток, то Падишах может выиграть. Покажем, как из $2n+1$ ~~блестя~~ напёрстка лежащего дном вверх подряд получить $2n+3$ напёрстка, лежащих дном вверх подряд так, чтобы дном вверх стали лежать правый и левый напёрстки относительно исходных $2n+1$. (см рис.). Укажем на самый правый дном вверх напёрсток. Тогда при $n=0$ мы уже получили $2n+3$ напёрстка.

было ↓↑↑↑↓

⇓

стало ↑↑↑↑↑

Иначе два правых напёрстка „сместились вправо" (было ↓↑↑…↑↑↑↓, стало ↓↑↑…↑↓↑↑). Теперь у нас ряд из $2n-1$ напёрстка дном вверх, потом один ↓, а потом 2↑. Проделаем такую же операцию с рядом из $2n-1$ нап.↑, пока у нас не получится ↓↑↓↑↑…↑↑. Теперь укажем на напёрсток в 0. Тогда мы получим $2n+3$ напёрстка ↑

Так это будет выглядеть для 5 напёрстков

$\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\boxed{\uparrow}\downarrow$

$\downarrow\uparrow\uparrow\boxed{\uparrow}\downarrow\uparrow\uparrow$

$\downarrow\boxed{\uparrow}\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$

$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$.

Тогда если Визирь расположит центральный напёрсток дном вверх, то Падишах так сможет „нарастить“ напёрстки ↑, расп. симметрично относительно середины и т.к. так 1001 - нечёт. ч., увеличивая их кол-во на 2 за раз визирем.

Ответ: центральный напёрсток

№6

Заметим, что для неотрицательных чисел $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ выполнено неравенство

$$\sqrt[2]{\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{\alpha+\beta+\gamma}} \le \sqrt[3]{\frac{\alpha x^3+\beta y^3+\gamma z^3}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

(взвешенное среднестепенное нер-во)

Пусть $x=2a$, $y=\frac{3}{2}b$, $z=\frac{4}{3}c$,

$\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{8}{9}$, $\gamma=\frac{27}{16}$.

Тогда $\alpha x^2=a^2$, $\beta y^2=2b^2$, $\gamma z^2=3c^2$,

$\alpha x^3=2a^3$, $\beta y^3=3b^3$, $\gamma z^3=4c^3$.

~~Значит~~

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{4}+\frac{8}{9}+\frac{27}{16}=\frac{4\cdot 3+16\cdot 8+9\cdot 27}{16\cdot 9}=$$

$$=\frac{383}{144}$$

Значит $\sqrt[2]{\frac{a^2+2b^2+3c^2}{\frac{383}{144}}} \le \sqrt[3]{\frac{2a^3+3b^3+4c^3}{\frac{383}{144}}}$

Возведём в 3 ст. и подставим $a^2+2b^2+3c^2=1$

$$\left(\sqrt[2]{\frac{144}{383}}\right)^3 \le \frac{2a^3+3b^3+4c^3}{\frac{383}{144}}$$

$$\left(\sqrt[2]{\frac{144}{383}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[2]{\frac{383}{144}}\right)^2 \le 2a^3+3b^3+4c^3$$

$$\sqrt{\frac{144}{383}} \le 2a^3+3b^3+4c^3.$$

При этом по св-ву взвешенного среднестепенного нер-ва равенство достигается, если $x=y=z$, т.е.

$$2a = \frac{3}{2}b = \frac{4}{3}c.$$

Тогда $b = \frac{4}{3}a$, $c = \frac{3}{8}a$.

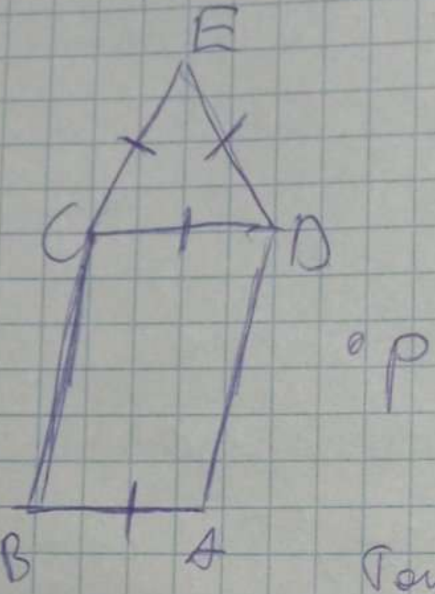
$$1 = a^2+2b^2+3c^2 = a^2 + 2\cdot\left(\frac{4}{3}a\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{3}{8}a\right)^2$$

Очев, что такое a существует.

Значит $\sqrt{\frac{144}{383}} = 12\sqrt{\frac{1}{383}}$ — минимальное значение $2a^3+3b^3+4c^3$.

Ответ: $12\sqrt{\frac{1}{383}}$

№7



По нер-ву $\triangle APB$

$BP + AP \geq AB = DE$, т.к. $\triangle CDE$ – равност. и $ABCD$ – параллелогр.

По нер-ву $\triangle PDE$

$DP + DE \geq PE$.

Тогда $AP + BP + DP \geq$

$\geq AB + DP = DE + DP \geq PE$.

ч.т.д.