№1

$x^4-2x^3+3x^2-2x+3=0$

$(x^4-2x^3+x^2)+x^2+(x^2-2x+1)+2=0$

$(x^2-x)^2+x^2+(x-1)^2+2=0$

Так как квадрат вещественного числа всегда больше либо равен 0, то сумма квадратов трёх вещественных чисел тоже больше либо равна 0, значит $(x^2-x)^2+x^2+(x-1)^2 \geqslant 0$, следовательно $(x^2-x)^2+x^2+(x-1)^2+2 \geqslant 2$, значит

$(x^2-x)^2+x^2+(x-1)^2+2>0$

Ответ: уравнение не имеет вещественных корней.

№3

Узнаем, ~~делится ли~~ может ли делится на 11 рассматриваемая сумма 40-х степеней.

~~Ка~~

По условию, каждая ~~циф~~ цифра числа не меньше 5, значит ~~каж~~ никакая из цифр не делится на 11, значит (по малой теореме Ферма) десятые степени этих цифр дают остаток 1 при делении на 11, следовательно и сороковые степени всех цифр дают тот же остаток, значит сумма 30-ти таких сороковых степеней сравнима с 30 по модулю 11, значит рассматриваемая сумма не делится на 11.

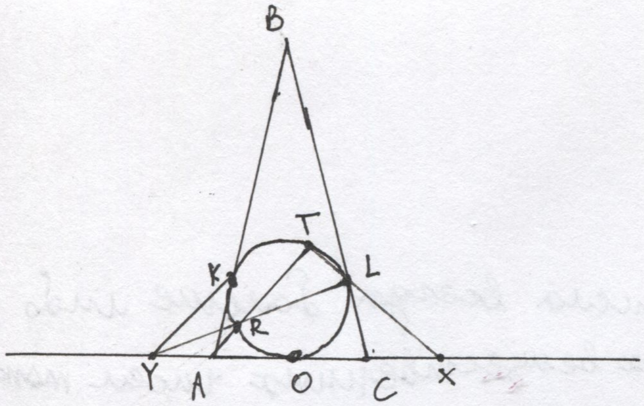
Так как $143 = 11 \cdot 13$, то рассматриваемая сумма 40-х степеней никогда не делится на 143.

Значит не существует таких 30-значных чисел, каждая цифра которых не меньше 5, таких, что сумма 40-х степеней всех их цифр делится на 143.

Так как из ложного утверждения (что такое число существует) всегда следует любое утверждение (что это число делится на 143), то эта теорема верна.

Ответ: верна.

№4



Пусть точка O – точка касания вписанной окружностью стороны AC.
Обозначим угол BOC за α.

Так как точки O и K – точки касания вписанной окружности, то $AO = AK$, следовательно $\angle AOK = 90^\circ - 0{,}5\angle BAC = 90^\circ - 0{,}5\alpha$

Так как точки O и L – точки касания вписанной окружности, то $OC = CL$, следовательно $\angle COL = 90^\circ - 0{,}5\angle ACB = 90^\circ - 0{,}5\angle BAC = 90^\circ - 0{,}5\alpha$

$\angle KOL = 180^\circ - \angle AOK - \angle COL = \alpha$

$\angle KRL = \angle KOL = \alpha$ (так как углы KRL и KOL опираются на одну дугу)

$\angle YRK = 180^\circ - \angle KRL = 180^\circ - \alpha$

$\angle YAK = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$

$\angle YRK = \angle YAK \Rightarrow$ четырёхугольник AYKR вписанный $\Rightarrow \angle AKY = \angle ARY$

$\angle TRL = \angle ARY = \angle AKY$

$\angle CLX = \angle TRL = \angle AKY$ (по теореме об угле между касательной и хордой)

Так как ~~$\triangle ABC$~~ $AB = BC$, то $KA = LC$.

Так как $AB = BC$, то $\angle YAK = \angle LCX$

$$\left.\begin{array}{l}\angle CLX = \angle AKY\\ KA = LC\\ \angle YAK = \angle LCX\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle YAK = \triangle XCL \Rightarrow AY = CX \Rightarrow$$ середины отрезков AC и XY совпадают.

что и требовалось доказать.

№5

Ответ: да, всегда.

Докажем по индукции:

База:

~~Если школьник 1, то при~~

Если $n=1$, то при $k=1$ и выбранном числе 1 все условия выполняются

Переход:

Доказать, что если при $n=x-1$ условия выполняются, то при $n=x$ условия также выполняются.

Рассмотрим первых $x-1$ школьников.

Найдём для них такое k_{x-1}, ~~что~~ а также числа $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{x-1}$, что при $k=k_{x-1}$ и числе, выбранном i-тым школьником, равном s_i, условие для первых $x-1$ школьников это будет выполняться.

Такие числа выбрать можно, так как для $n=x-1$ теорема уже доказана.

Пусть p — некоторое простое число, не присутствующее в разложении k на простые сомножители.

Возьмём $k_x = k_{x-1} \cdot p^2$.

Возьмём m_i равное $s_i \cdot p$, если i-й школьник не дружит с x-тым, равное $s_i \cdot p^2$, если i-й школьник дружит с x-тым, равное k_{x-1}, если $i=x$.

Тогда при $k=k_x$ и если i-й школьник выберет число m_i то условия будут выполняться.