№1.

$x^4-2x^3+3x^2-2x+3 = x^4-2x^3+x^2+x^2-2x+1+x^2+2=$

$= x^2(x-1)^2+(x-1)^2+x^2+2 = (x^2+1)(x-1)^2+x^2+2.$

Заметим, что $x^2+1>0$; $(x-1)^2 \geq 0$, т.е. $(x^2+1)(x-1)^2 \geq 0$ и $x^2+2>0$, т.е. $(x^2+1)(x-1)^2+x^2+2>0 \Rightarrow$

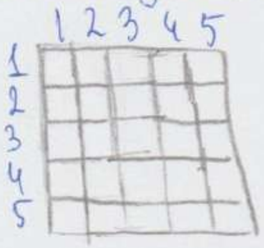
$\Rightarrow x^4-2x^3+3x^2-2x+3>0 \Rightarrow$ у уравнение $x^4-2x^3+3x^2-2x+3=0$ нет решений.

Ответ: нет решений.

## №2.

Докажем, что при $n \geq 5$ это невозможно.

Рассмотрим левый верхний квадрат $5 \times 5$ и пронумеруем столбцы и строки:




Тогда заметим, что в 1 столбце найдутся три клетки одинакового цвета (пусть черного без ограничения общности). Тогда заметим, что если в пересечении какого-то столбца 2, 3, 4 или 5 с данными строками хотя бы две чёрные, то мы нашли нужный нам прямоугольник, а если это не так, то в каждом из столбцов в пересечении не более одной чёрной клетки $\Rightarrow$ минимум 2 белые, значит, найдутся два столбца из 2-5, что у них в пересечении с хотя бы двумя из выделенных строк стоят по две белые клетки (по принципу Дирихле, т.к. способов расставить хотя бы 2 белые три (ещё один, когда все белые, но можно для условности одну из трёх заменить на чёрную), а столбцов 4) и они будут образовывать нужный прямоугольник.

Значит, наибольший $n \leq 4$. А для 4 есть пример:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ч | ч | б | б |
| б | ч | ч | б |
| б | б | ч | ч |
| ч | б | б | ч |

ч - чёрная клетка
б - белая клетка.

Значит, $n=4$ - наибольший.

Ответ: 4.

№3.

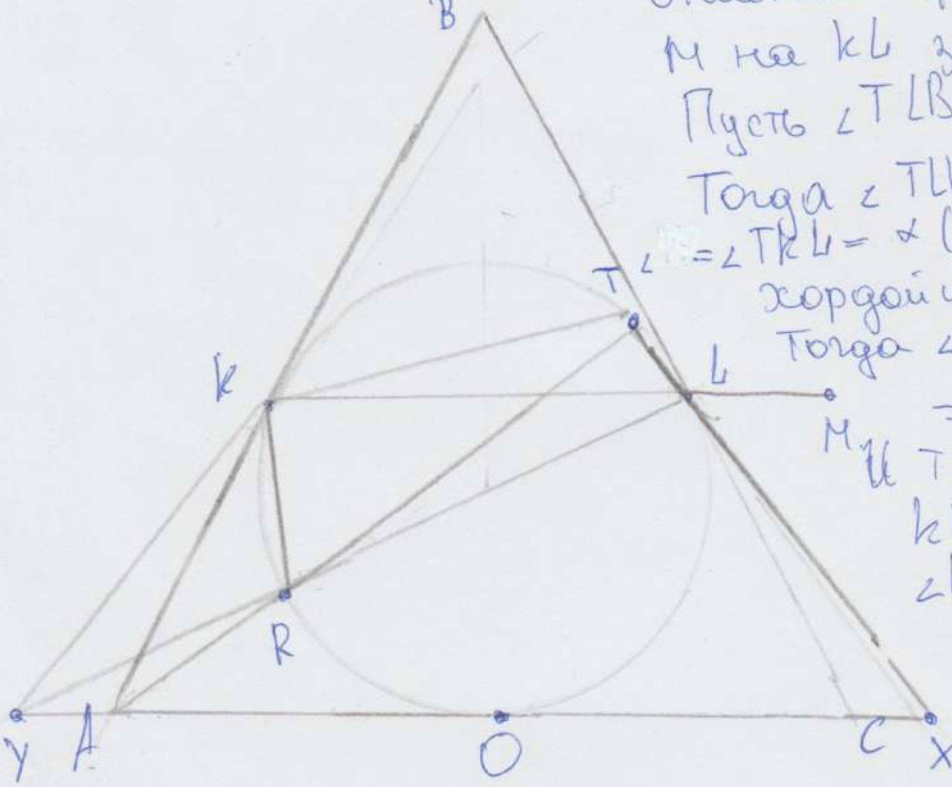
Рассмотрим следующие числа:

$\underbrace{696969\ldots69}_{11 \text{ раз „69 подряд}}\underbrace{000\ldots0}_{18 \text{ раз}} = A$ и $\underbrace{6969\ldots69}_{10 \text{ раз „69" подряд}}96\underbrace{00\ldots0}_{18 \text{ раз}} = B$

Тогда ~~сумма значит~~ заметим, что $6^{38} \equiv 1 (\bmod 13)$ и $9^{38} \equiv 1 (\bmod 13)$.
А вся сумма ~~цифр~~ обоих чисел $(6^{40}+9^{40})\cdot 11 \vdots 11$ и
$(6^{40}+9^{40})\cdot 11 \equiv 6^{40}+9^{40} \equiv 6^2+9^2 \equiv 0 (\bmod 13)$, т.е.
$(6^{40}+9^{40})\cdot 11 \vdots 143$. Тогда $C = B - A = 27\cdot 10^{18} \not\vdots 143$, значит,
или $B$, или $A$ не кратно 143 (иначе $C \vdots 143$), т.е.
~~что~~ теорема Максима неверна

Ответ: нет, неверна.

№4.




Отметим произвольную точку M на KL за точку L

Пусть $\angle TLB=\alpha$, $\angle MLB=\beta$.

Тогда $\angle TLK=180^\circ-\alpha-\beta$,

$\angle\ =\angle TKL=\alpha$ (угол между хордой и касательной.

Тогда $\angle KTL=180^\circ-\angle TKL-\angle TLK=$
$=\angle\beta$.

И т.к. $\triangle ABC$ − р/б, то
$KL \parallel AC \Rightarrow$
$\angle KTL=\angle BLM=\angle BCX=$
$=\angle BAY=\beta$.

Т.к. KRLT − вписанный и $\angle KTL=\beta$, то $\angle KRL=180^\circ-\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle KRY=\beta$ и т.к. $\angle KAY=\beta$, то KYAR − вписанный,
то $\angle KYR=\angle KAR$. $\angle TRL=\beta=\angle YRA$ и $\angle KAY=\angle LCX=\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle RYA+\angle RAK=\angle LXC=180^\circ-\alpha-\beta$ и т.к. $\angle KYR=\angle KAR$, то
$\angle RYA+\angle RAK=\angle AYK=\angle LXC=180^\circ-\alpha-\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle YKA=180^\circ-\angle KAY-\angle KYA=\alpha \Rightarrow \angle YKA=\angle YLC=\alpha$, а также
$\angle YKA=\angle CLX$ и $\angle YAK=\angle XCL$ и т.к. $\triangle ABC$ − р/б, то $AK=LC$, т.е.
$\triangle KAY=\triangle LCX$ по стороне и прилежащим углам, т.е.
$YA=CX$, значит, если O − середина AC, то $OY=OX$, т.е.
середина отрезков XY и AC совпадают. ч.т.д.

№5.

Пусть $k = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2$ (где $p_1, p_2 \ldots p_n$ различные простые числа). Занумеруем школьников от 1 до n.

Рассмотрим i-того школьника, тогда его число состоит из всех $p_1, p_2 \ldots p_n$ в 1 или 2 степени и $p_i$ в 0 при этом $p_k$ в 1-ой степени, если i-тый не дружит с k-тым и во 2-ой, если дружит, аналогично для всех. Таким образом, если m-тый дружит с n-тым, то X-равное произведению их чисел будет делится на любое $p_j^2$, если $j \neq n$ и $j \neq m$ (т.к. число m и n делится на $p_j$), а также будет делится на $p_n^2$ (т.к. число m-того делится на $p_n^2$) и делится на $p_m^2$ (т.к. число n-того делится на $p_m^2$), т.е. $X \vdots k$. А если n и m не дружат, то число n-того не делится на $p_n$, а число m-того содержит $p_n$ в 1-ой степени, т.е. $X \not\vdots p_n^2$, т.е.

$X \not\vdots k$. Значит, если два школьника дружат, т произведение их чисел кратно k, иначе нет, т.е. произведение чисел выбранных школьников делится на k тогда и только тогда, когда эти школьники являются друзьями, т.е. всегда можно выбрать такое число k.

Ответ: да, всегда.