② Ответ: да, существует.

Пример: $2,\ \overset{6}{2\cdot 3},\ 3,\ \overset{12}{3\cdot 4},\ 4,\ 4\cdot 5,\ 5,\ 5\cdot 6,\ (6),\ 6\cdot 7,\ \ldots,\ (n-1)n,\ n,\ n(n+1)\ldots$

Если n в последовательности уже встречалось, просто не пишем его ещё раз: $((n-1)n;\ n(n+1)) \geq n > 1$. Остальные числа (вида $k(k+1)$) не повторятся, поскольку строго больше всех записанных перед ним. ($k(k+1) > k$, $> (k-1)k$, аналогично далее). Очевидно, все натуральные числа встретятся в последовательности как числа вида k или равные им $l(l+1)$, записанные до них. Значит, последовательность удовл. условию.

Замечание: есть и второй, более формальный (возможно) метод написать то же самое:

$\{a_k\}: \forall n \in \mathbb{N}$ $a_{2n} =$ [redacted] $(n+1)(n+2)$

$a_{2n-1} =$ [redacted] $n+1$

. Потом просто вычеркнем все копии чисел, кроме первого слева вхождения каждой. (точнее, правую копию — их всегда не более двух).

① Запишем в порядке убывания все числа, которые можно получить как A:

$$\overbrace{\underbrace{987, 986, \ldots, 981, 976, \ldots, 921,}_{a-b}\ \underbrace{876, 875, \ldots, 321.}_{b}}^{a}$$

Заметим, что все числа, не содержащие 9, можно получить [redacted] как B, содержащие — нельзя. Но если число как A содержит 9, то она первая в числе цифра, а значит, оно больше 876 и слева от черты. Пусть A — полученных чисел a (все числа в ряду)

B — полученных чисел b (справа от черты).

Посмотрим на вероятность получения какого-то конкретного числа. Поскольку мы упорядочим полученные цифры по убыванию, повторов цифр нет, то эта вероятность всегда равна $\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}$ для A и $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$ для B, т.е. не зависит от числа. Тогда вероятность выпадения любой пары одна и та же, все исходы равновероятны.

Тогда искомая вероятность равна среднему арифметическому вероятностей $A>B$ для каждого конкретного B. ([redacted] поскольку выпадения B_1 и B_2 — несовместные события)

Но $A>B \Leftrightarrow$ A в ряду левее B.

Тогда пусть B_i — число в ряду на позиции $a-b+i$,

тогда [redacted] $P_{B_i} = \frac{a-b+i-1}{a}$; $P_{\text{искомая}} = \frac{\sum_{i=1}^{b} P_{B_i}}{b} = \frac{b(a-b-1)}{ab} + \frac{\sum_{i=1}^{b} i}{ab} =$

$$= \frac{\cancel{b}(a-b-1)}{a\cancel{b}} + \frac{\frac{\cancel{b}(b+1)}{2}}{a\cancel{b}} = \frac{2(a-b-1)}{2a} + \frac{b+1}{2a} = \frac{2a-2b-2+b+1}{2a} = 1-\frac{b+1}{2a}.$$

Остаётся посчитать a и b, но это просто $C_9^3 = 84$ и $C_8^3 = 56$.

Искомая вероятность $1-\frac{57}{168} = \frac{111}{168} = \frac{37}{56}$

(6) $a^2+2b^2+3c^2=1.$

$\exists\ B=b\sqrt{2},\ C=c\sqrt{3}$

$a^2+B^2+C^2=1.$

$\exists\ \alpha=a^2,\ \beta=B^2,\ \gamma=C^2$

$\alpha+\beta+\gamma$

[redacted] $2a^3+3b^3+4c^3=2a^3+\frac{3}{2\sqrt{2}}B^3+\frac{4}{3\sqrt{3}}C^3=2\alpha^{1,5}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\beta^{1,5}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\gamma^{1,5}$

1) Зафиксируем $c(\gamma)$. Пусть $\varphi=1-\gamma$, $\alpha+\beta=\varphi$, $\beta=\varphi-\alpha$.

Найдём минимум $2\alpha^{1,5}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\beta^{1,5}=2\alpha^{1,5}+\frac{3}{2\sqrt{2}}(\varphi-\alpha)^{1,5}=f(\alpha)$

Для этого возьмём производную: $f'(\alpha)=3\alpha^{0,5}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot 1,5\cdot(\varphi-\alpha)^{0,5}\cdot(-1)=3\sqrt{\alpha}-\frac{9}{4\sqrt{2}}\sqrt{\varphi-\alpha}$.

Нам интересно увеличивать α, когда $f'(\alpha)<0$, и уменьшать, когда $f'(\alpha)>0$ (в силу непрерывности, монотонности, $0\le\alpha\le\varphi$...)

Тогда положение равновесия в $f'(\alpha)=0$, и соотв. минимум искомого выражения при заданном $c(\gamma)$

$f'(\alpha)=0=3\sqrt{\alpha}-\frac{9}{4\sqrt{2}}\sqrt{(\varphi-\alpha)}$

$3\sqrt{\alpha}=\frac{9}{4\sqrt{2}}\sqrt{\varphi-\alpha}$

$9\alpha=\frac{81}{32}(\varphi-\alpha)=\frac{81}{32}\beta$

$\alpha=\frac{9}{32}\beta \Rightarrow$ положение равновесия единственное.

2) Аналогично зафиксировав β: $\varphi=1-\beta$, $\alpha+\gamma=\varphi$, $\gamma=\varphi-\alpha$

$\min\left(2\alpha^{1,5}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\gamma^{1,5}\right)=\min\left(2\alpha^{1,5}+\frac{4}{3\sqrt{3}}(\varphi-\alpha)^{1,5}\right).$
$= f(\alpha)$

$f'(\alpha)=3\sqrt{\alpha}-\frac{4}{2\sqrt{3}}\sqrt{\varphi-\alpha}=3\sqrt{\alpha}-\frac{4}{2\sqrt{3}}\sqrt{\gamma};\ =0:$

$9\alpha=\frac{16}{4\cdot 3}\gamma$

$27\alpha=4\gamma$

$\alpha=\frac{4}{27}\gamma$

3) Фиксируя α: $\varphi=1-\alpha$, $\beta+\gamma=\varphi$, $\gamma=\varphi-\beta$.

$\min\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\beta^{1,5}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\gamma^{1,5}\right)=\min\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\beta^{1,5}+\frac{4}{3\sqrt{3}}(\varphi-\beta)^{1,5}\right)$

$f'(\beta)=\frac{9}{4\sqrt{2}}\sqrt{\beta}-\frac{4}{2\sqrt{3}}\sqrt{\varphi-\beta}=\frac{9}{4\sqrt{2}}\sqrt{\beta}-\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\gamma};\ =0:$

$\frac{9}{4\sqrt{2}}\sqrt{\beta}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\gamma}$

$\frac{81}{32}\beta=$ [redacted] $\frac{4}{3}\gamma$

$243\beta=$ [redacted] 128γ

$\beta=$ [redacted] $\frac{128}{243}\gamma.$

4) Тогда единственное положение полного равновесия, очевидно, выполнение всех трёх равенств (в пределе, поочерёдно фиксируя переменные, мы стремимся сюда).

$$\begin{cases}\alpha=\frac{9}{32}\beta\\ \alpha=\frac{4}{27}\gamma\\ \beta=\frac{128}{243}\gamma\end{cases}$$

Третье уравнение не даёт новой информации, лишь подтверждая верность выкладок.

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{9}{32}\cdot\frac{36}{128}\cdot\frac{\beta}{\gamma}=\frac{128}{243}$ [redacted]

Тогда $\alpha:\beta:\gamma=36:128:243$

$a^2:2b^2:3c^2=36:128:243$

[redacted] $a^2:b^2:c^2=36:64:81$

$a:b:c=6:8:9$

Найдём точные значения из условия $a^2+2b^2+3c^2=1$: $\begin{cases}a=6x\\ b=8x\\ c=9x\end{cases}$

$407x^2=1$

$x=\frac{1}{\sqrt{407}}\Rightarrow a=\frac{6}{\sqrt{407}},\ b=\frac{8}{\sqrt{407}},\ c=\frac{9}{\sqrt{407}}.$

$2a^3+3b^3+4c^3=\frac{2\cdot 216+3\cdot 512+4\cdot 729}{407\sqrt{407}}=\frac{4884}{407\sqrt{407}}=\frac{12}{\sqrt{407}}.$

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{407}}.$

⑤ Пронумеруем напёрстки слева направо от 1 до 1001.

1) Заметим, что любой ход Падишаха не меняет чётности количества напёрстков „дном вверх" на нечётных позициях (всегда 0 или ± 2 за ход, и нельзя упереться в конец ряда). В конце их должно стать нечётное количество (501), значит, Визирь должен переворачивать напёрсток, находящийся на нечётной позиции.

2) Заметим, что, поскольку Падишах может переворачивать лишь соседей напёрстка „дном вверх", если изначально Визирь перевернул 1-ый или 1001-ый напёрсток, то „дном вверх" всегда либо только 1-ый, либо только 1001-ый, либо два последовательных (любой ход 0, кроме ходов на границу -1 – с границы $+1$); тогда Падишах в этом случае не сможет победить.

3) Заметим, что если Визирь перевернёт 501-ый напёрсток, Падишах сможет победить: ходы: (переворот соседей n-ного).

$$501 \to 500, 502 \to 499, 501, 503 \to \ldots \to 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 1000 \to \text{победа}.$$

Тогда есть и обратная этой последовательность ходов, переводящая исходное положение в положение, где ↑ только 501-ый (ходы все обратимые, достаточно просто сходить в обратном порядке эту цепочку).

4) Остальные начальные нечётные не подойдут, т. к. это бы значило, что можно перевести $2n+1$-ый в 501-ый, что невозможно (из п. 3)).

Ответ: 501-ый.