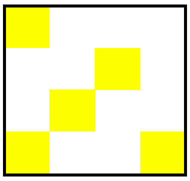
1) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = 0$
$x^4 - 2x^3 - 2x + 3x^2 + 3 = 0$
$x^4 - 2x(x^2 + 1) + 3(x^2 + 1) = 0$
$x^4 = (2x – 3)(x^2 + 1)$
=> x^4 делится на $(x^2 + 1)$
=> $x^4 = 0$ => $x = 0$

При $x = 0$ уравнение $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = 0$ не верно
Ответ: Нет решений.



2) Ответ: Наибольшее n = 4

Предположим, что мы смогли раскрасить для n > 4.
Посмотрим на верхнюю строку. По принципу Дирехле в ней будет n/2 при чётном n и (n+1)/2 при нечётном n, клеток одного цвета (скажем, что это 1 цвет). Назовём это количество k. При n > 4, k > 2. Значит у нас есть таблица n - 1 на k, в которой в каждой строчке может стоять не более одного прямоугольника 1 цвета (иначе образуется прямоугольник с первой строчкой). (n - 1) - k >= 1 Если одна из оставшихся строчек закрашена полностью во 2 цвет, значит она образует прямоугольник со строчкой в которой один 1 цвета (так как k >=3). Противоречие => наибольшее n = 4.

3) Теорема не учитывает расстановку цифр в числе. Если число abc (a 28 значное число, b и c цифры) кратно 143, то и число acb будет кратно 143, но отличаться менее чем на 100. Это могут быть разве что одинаковые числа => все числа в цифры одинаковы (если есть различные можем поставить их на 2 младших разряда, а затем поменять местами).
У каждой из цифр есть пара которая в 40 степени даёт такой же остаток при делении на 143 как и 40 степень другой цифры (5, 6, 7 сравнимы с 1, а 8 и 9 с 100)=> мы сможем заменить одно из чисел на другое и получить не кратное 143 числ, но подходящее под условие теоремы.

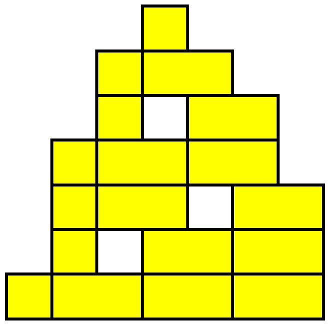
4)

5) Докажем по индукции, что это возможно.
База: n=2 пара людей если они дружат, то их числа x и k/x, иначе x и y (x*y не делится на k)
Предположение: если мы добавим ещё одного человека, то сможем найти подходящее k.
Шаг: для n людей есть такое k1, найдём такое K2 для n+1. Добавим к компании из n детей ещё одного. Найдём такое простое число a, на которое не делится ни одно из чисел других детей и k1. $K2 = k1 * a^2$ Домножим числа всех детей на a, а числа тех детей которые дружат с новеньким ещё на a, а у самого новенького будет число $k2/(a^2)=k1$. Тогда друзья новенького будут домножать его число на своё (включая a^2) и оно будет кратно k2, Люди с произведение чисел с людьми с которыми он не дружит будет кратно k2/a, но не k2, а пары людей среди которых нет новенького также не “изменят дружбы” так как и оба их числа домножили на a и само k на a^2(a взаимнопросто со всеми остальными числами у всех детей и k). Значит мы сможем получить любую компанию детей с любыми дружественными связями => такое k всегда найдётся.
Ответ: Да, всегда.

6) Если визирь перевернёт изначально самую правый или левый напёрсток так как будет всегда рядом 2 напёрстка дном вверх и при перевороте их и останется 2 (кроме случаев когда в углу только один дном вверх, но от туда только один выход в два соседних напёрстка).
Схемы представленные в задачи имеют ввиду, что одна строка это положение напёрстков полученных из преведущей строки (жёлтые это дном вверх)

Справа нарисована схема, как переместить один напёрсток лежащий не на конце ряда на соседнее место.

Перемещаем перевёрнытый вверх напёрсток в середину ряда, и расширяя ряд, как показано на рисунке правее.
Мы выделяем левую клетку, и рядом с ней добавляем 2 новых напёрстка дном вверх. Создаётся пара которую мы передвигаем до правиго края доски. А потом создаём новую. И последним действием рядом с одной клеткой ставим ещё две о все напёрстки перевернуты.
Ответ: все кроме крайних.



7)
8)