Пусть выбираются по этим правилам числа A и B. Если A:

I) не содержит „9".

Тогда A выбирается по тем же правилам, что и B. Количество способов выбрать 2 таких числа равно $C_8^3 \cdot C_8^3$.

Из них в C_8^3 случаях $A = B$. Случаев $A > B$ столько же, сколько и случаев $A < B$ (т.к. каждой паре $(x;y)$, где $x<y$, найдется пара $(y;x)$ и наоборот).

Значит, $A > B$ в $\frac{(C_8^3)^2 - C_8^3}{2}$ случаях.

II) содержит „9"

Т.к. трехзначное число A будет тогда начинаться с „9", а трехзначное число B не более, чем на „8", то $A > B$ всегда.

Кол-во способ выбрать 2 разные цифры от 1 до 8 в число A равно C_8^2, а кол-во способов выбрать число B — C_8^3. Всего исходов $C_8^2 \cdot C_8^3$, каждый из которых благоприятные.

Требуемая вероятность $P = \dfrac{\frac{(C_8^3)^2 - C_8^3}{2} + C_8^2 \cdot C_8^3}{(C_8^3)^2 + C_8^2 \cdot C_8^3}$

$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$; $C_8^2 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$

$$P = \frac{\frac{1}{2} 56(56-1) + 28 \cdot 56}{56^2 + 28 \cdot 56} = \frac{\frac{55}{2} + 28}{56+28} = \frac{55+56}{168} = \frac{37}{56}$$

Ответ: $\frac{37}{56}$

Предположим, что это можно утверждать при $k \geq 2022$. Тогда приведём контрпример: если все k супружеских пар друг с другом незнакомы. В этом случае никакие 2 женщины не могут находиться в одной комнате. Получается, чтобы посадить всех женщин потребуется не менее k комнат. Значит, мужчинам комнат точно не достанется. Противоречие.
$\Rightarrow k < 2022$
Докажем, что можно распределить всех требуемым образом при $k = 2021$.
Представим граф, вершинами которого являются супружеские пары, а 2 пары соединены ребром, если они знакомы. Пусть в графе x компонент связности. Пронумеруем отдельно в каждой компоненте связности.
Далее в i-ую комнату для мужчин будем помещать мужчин из пар с номером i. Тогда в x комнат разместятся все мужчины и в каждой из них мужчины знать друг друга не будем.
Теперь представим аналогичный граф, но в котором вершины будут соединяться, если соответствующие пары незнакомы. Аналогично можно разместить всех женщин в y комнат, где y – количество компонент связности в этом графе (тогда, действительно, если 2 женщины оказались в одной комнате, значит они были из разных комп. св., значит не были соединены ребром, т.е. были знакомы).

Пусть самая большая комп. св. в первом графе содержала z вершин.

Тогда во втором графе каждая из этих z вершин будет соединена со всеми вершинами из оставшихся комп. св.

Т.е. компонент св. во втором графе будет точно не больше z ; $y \leq z$.

Теперь докажем, что $x + z \leq 2022$

Рассмотрим эту самую большую комп. св. в первом графе. Вершин, не входящих в эту комп. св. будет $2021 - z$. Т.к. в каждой комп. св. не менее 1 вершины, то компонент помимо самой большой будет не более $2021 - z$.

Всего, $x \leq 1 + (2021 - z)$

$x + z \leq 2022$

Итого: $x + y \leq x + z \leq 2022$

Нам удалось рассадить всех людей в не более, чем 2022 комнаты по описанным правилам.

Ответ: 2021

$n=1$ - корень $(2^0+1=2 \vdots 1)$

Если $n>1$, то $2^{n-1}+1 \not\vdots\, 2 \Rightarrow n$ - нечётное.

Докажем, что для всех нечетных $n>1$: $2^{n-1}+1 \not\vdots\, n$.

I) Если n - простое, то по малой теорем Ферма (n взаимопросто с 2) $2^{n-1} \underset{n}{\equiv} 1$, т.е. $2^{n-1} \not\equiv -1 \pmod n$. Противоречие

II) Если n - составное

Докажем, что таких подходящих n нет.

По т. Эйлера $2^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1$, где $\varphi(n)$ - функция Эйлера

Найдем max значение выражения, когда $x=y$.

$2x^2+z^2+\frac{9}{16}x^2=1$; $z^2=1-\frac{41}{16}x^2$

Найдем те значения A, которые $xy+yz+xz$ принимает один раз.

$xy+yz+xz=A$; $x^2+2xz=A$

$2xz=A-x^2$; $4x^2z^2=(A-x^2)^2$

$4x^2\left(1-\frac{41}{16}x^2\right)=(A-x^2)^2$ $\qquad x^2=t$

$4t\left(1-\frac{41}{16}t\right)=A^2-2At+t^2$

$\frac{45}{4}t^2-2(A+2)t+A^2=0$

$D=0$; $(A+2)^2-\frac{45}{4}A^2=0$

$4(A^2+4A+4)-45A^2=0$

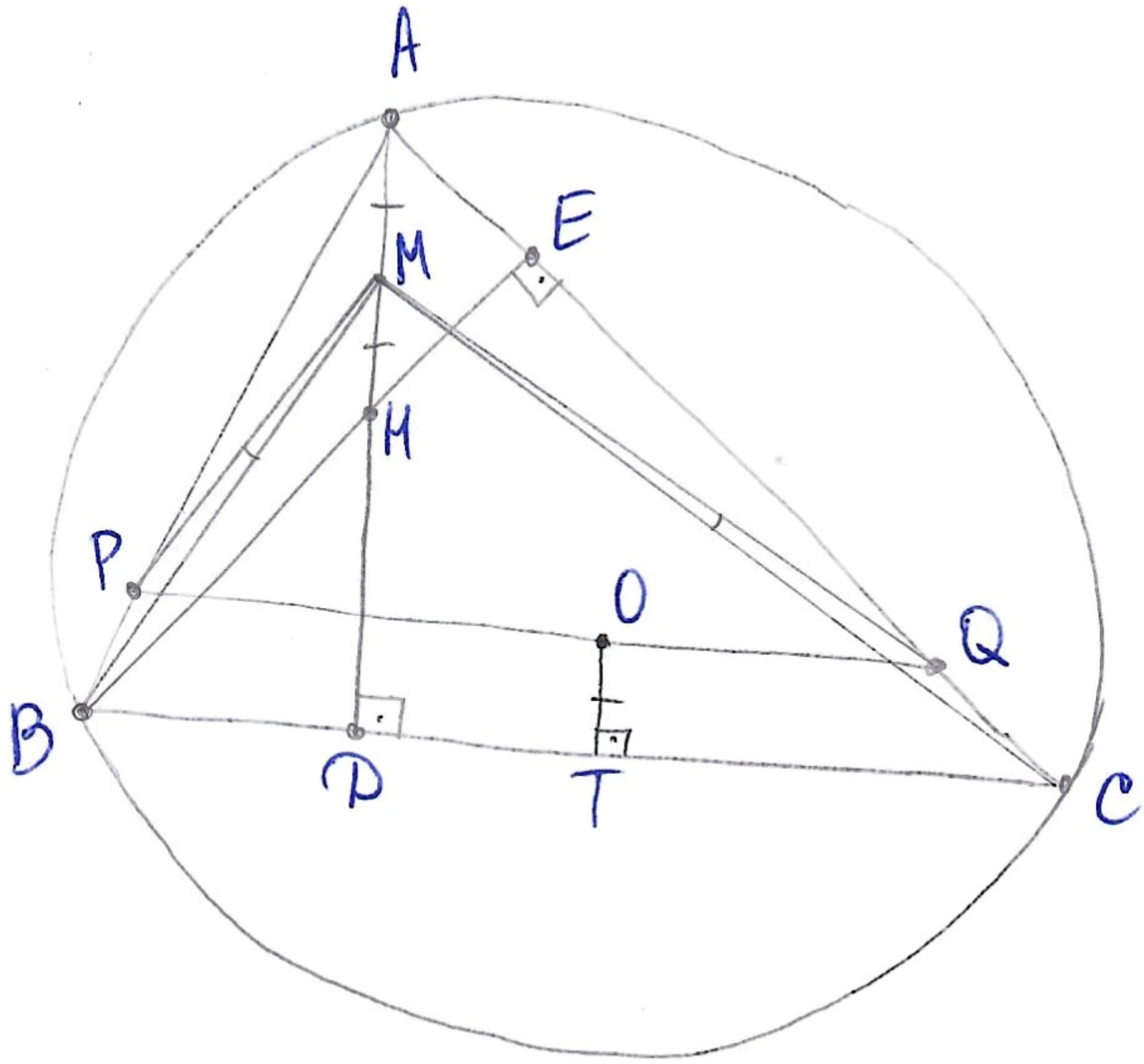
$41A^2-16A-16=0$

$A=\frac{8\pm\sqrt{8^2+16\cdot41}}{41}=\frac{8\pm12\sqrt{5}}{41}$

Значит, $\max(x^2+2xz)=\frac{4}{41}(2+3\sqrt{5})$

То, что максимум выражение достигается при $x=y$, следует из симметрии.

Ответ: $\frac{4}{41}(2+3\sqrt{5})$



По свойству центра описанной окр. и ортоцентра $AH = 2OT$, где T - основание перпендикуляра, опущенного из O на BC.
$AM = MH = OT$

Точки M, E, D и T лежат на окружности девяти точек.

Наибольшее кол-во закр. клеток – 397.

Пример: пронумеруем все столбцы от 1 до 57 слева направо, а все строки – от 1 до 57 снизу вверх. Будем отмечать все точки, принадлежащие определенным диагоналям, параллельным главной диагонали квадрата, идущей из левого нижнего угла в правый верхний (или самой главной диагонали)

Сначала отметим диагонали, выходящие из клеток в самой нижней строчке с номерами 2, 6, 16, 32 и 56.

Далее отметим диагонали, выходящие из клеток в самом левом столбце с номерами 1, 3, 9, 21, 43, 53 и 57. см. рисунок на след. стр.

(расстановка была получена не случайно, сначала отмечалась главная диагональ, а потом закрашивались побочные диагонали, находящиеся на минимальном расстоянии от предыдущих диагоналей так, чтобы не образовывались никакие прямоугольники)

Полученная расстановка удовлетворяет условию, и в ней 397 закрашенных клеток.