№1.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+x}$ - последовательность всевозможных чисел A, упорядоченных по возрастанию, где n - кол-во чисел A, не имеющих цифру 9 в записи = кол-во чисел B;

x - кол-во чисел A, имеющих цифру 9 в записи.

Заметим, что первые n чисел не имеют цифру 9 в записи, а последние x-имеют т.к. цифра 9 будет стоять на первом месте.

Пусть $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n+x}$ - последовательность чисел, где b_i - кол-во чисел B, которые $< a_i$.

Заметим, что $b_1 = 0$ и $b_{i+1} = b_i + 1$ для всех $i < n$. Это верно, так как если бы мы составили для всех чисел B последовательность, подобную (a_{n+x}), то они бы имели n членов и совпадали с $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Значит, $b_i = i-1$ для всех $i \leq n$.

Заметим, что $b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = b_{n+x} = n$, т.к. они все на первом месте имеют цифру 9 и 7 всех возможных чисел B.

Значит, кол-во пар A и B, таких, что $A > B$ = сумме $(b_{n+x}) = 0+1+\ldots+n-1+n\cdot x$.

$n = C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{6} = 56$

$x = C_8^2 = \frac{8\cdot7}{2} = 28$

$\frac{55\cdot56}{2} + 28\cdot56 = 3108$ (пар)

$P = \frac{3108}{C_9^3\cdot C_8^3} = \frac{3108}{\frac{9\cdot8\cdot7}{6}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{6}} = \frac{3108}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot7} = \frac{3108}{4704} =$

$= \frac{37}{56}$

Ответ: $\frac{37}{56}$

№2

Ответ: да. Представим алгоритм составления последовательности и докажем его корректность.

Будем действовать по индукции по простым числам в порядке возрастания.

База: составим последовательность: 2, 4, 8, 16, ...

Шаг индукции: пусть для простого числа p верно, что можно составить последовательность из всех натуральных чисел, в разложении которых на простые множители встречаются числа $< p$. Докажем, что можно добавить все натуральные, делящиеся на p и p — самый большой простой делитель.

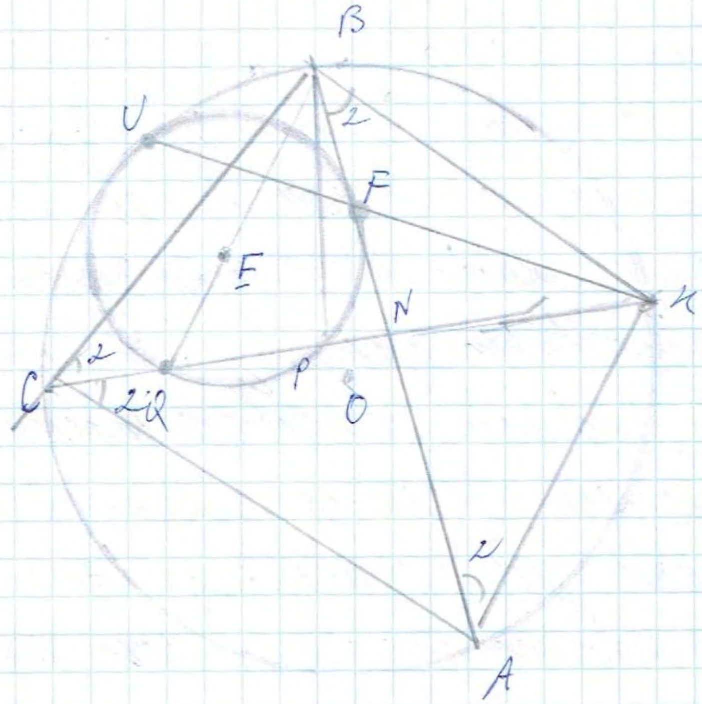
Пусть была последовательность $a_1, a_2, \ldots$

Тогда между a_i и a_{i+1} впишем $a_i \cdot p, a_i \cdot p^2, a_i \cdot p^3, \ldots$. Заметим что a_i и a_{i+1} были не взаимно простыми $\Rightarrow$ все вписанные числа между a_i и a_{i+1} не взаимно простые. Значит, условие на не взаимную простоту выполнено.

Очевидно, что новая последовательность содержит только уникальные элементы, так как для начальной это тоже верно. Также понятно, что мы записали все числа, в разложении которых встречаются только простые $\leq p$. Остаются лишь числа вида $p, p^2, p^3, \ldots$. Их можно вписать между любыми новыми числами, делящимися на p.

№3

Дано:



окр. $(O; R)$ - описана около $\triangle ABC$

окр $(E; R_2) \subseteq$ окр $(O; R) =$ т. U

$AB \subseteq$ окр $(E; R_2) =$ т. F.

CK - бисс-са $\angle ACB$

$\angle ACK = \angle BCK = \alpha$

$CK \cap$ окр $(E; R_2) = Q$ и P.

$AB \cap CK = N$

Доказать:

$\angle CBQ = \angle ABP$ - ?

Доказательство:

1) $\begin{cases} \angle ACK = \angle ABK = \alpha \\ \angle BAK = \angle BCK = \alpha \end{cases} \Rightarrow \triangle ABK$ - р/б $\Rightarrow BK = AK \Rightarrow$

$\Rightarrow \breve{BK} = \breve{AK}$

Пусть $VF \cap$ окр$(O; R) =$ т. T

По лемме Архимеда: VF - бисс-са $\angle AVB \Rightarrow$

$\Rightarrow \breve{AT} = \breve{BT} \Rightarrow$ т. T и т. K совпадают $\Rightarrow K, F, V \in$ одной прямой.

2) По т. косинусов в $\triangle ABK$:

$AB^2 = 2 \cdot AK^2 - 2 \cdot AK^2 \cdot \cos(180° - 2\alpha)$

$AB^2 = 2AK^2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)$

$AB^2 = 4AK^2 \cdot \cos^2\alpha$

$AB = 2AK \cdot \cos\alpha$

$AF + BF = 2AK \cdot \cos\alpha \mid \cdot BF$

$0 = AF \cdot BF + BF^2 - 2 \cdot AK \cdot BF \cdot \cos\alpha \mid + BK^2$

$BK^2 = AF \cdot BF + BF^2 + BK^2 - 2 \cdot BK \cdot BF \cdot \cos\alpha$

По т. косинусов в $\triangle BFK$:

$KF^2 = BF^2 + BK^2 - 2 \cdot BK \cdot BF \cdot \cos\alpha$

$BK^2 = AF \cdot BF + KF^2$

$AF \cdot BF = KF \cdot FU$ (по свойству пересекающихся хорд)

$BK^2 = KF \cdot FU + KF^2$

$BK^2 = KF \cdot (KF + FU)$

$BK^2 = KF \cdot KU$

$KF \cdot KU = KP \cdot KQ$ (т.к. KQ и KU — секущие, проведённые из одной точки)

$BK^2 = KP \cdot KQ \Rightarrow \frac{BK}{PK} = \frac{KQ}{BK}$

Рассмотрим $\triangle BQK$ и $\triangle PBK$. $\angle K$ — общий,

$\frac{BK}{PK} = \frac{KQ}{BK} \Rightarrow \triangle BQK \sim \triangle PBK$ (по 2 признаку)

Значит, $\angle BQP = \angle KBP$,

3) $\angle CBQ = \angle BQP - \angle BCQ = \angle BQP - \alpha$

$\angle ABP = \angle KBP - \angle ABK = \angle KBP - \alpha = \angle BQP - \alpha =$
$= \angle CBQ$, ч.т.д.

№4

1) Пусть у нас есть k пар, которые ни с кем не знакомы между собой. Тогда всех мужчин мы можем отправить в 1 комнату, а для каждой женщины нужно предоставить отдельную комнату. Итого нам нужно минимум $k+1$ комната $\Rightarrow k \leq 2021$.

2) Докажем, что при $k=2021$ всегда есть корректное распределение по комнатам.

Пусть x комнат мы предоставим для мужчин. Мы это можем сделать всегда, так как мужчин - 2021, а комнат - 2022.
Пусть женщин мы тоже смогли распределить по комнатам следующим образом: $a_1, a_2, \dots, a_{2022-x}$, где a_i - кол-во женщин в i-ой комнате

для женщин.

$a_1+a_2+\dots+a_{2022-x}=k=2021$

Заметим, что в каждой из x комнат для мужчин верно, что они друг с другом не знакомы. А значит, что и их женщины незнакомы $\Rightarrow$ из каждой комнаты мужчин мы можем брать только 1 женщину (пару кого-то из этих мужчин), если мы будем поочерёдно заполнять $a_1, a_2, \dots, a_{2022-x}$.

Значит, $a_1, a_2, \dots, a_{2022-x} \le x$.

$a_1+a_2+\dots+a_{2022-x}=2021 \le x\cdot(2022-x)$

$x^2-2022x+2021=0$

$D=2022^2-4\cdot 2021=4080400$

$x_1=\frac{2022+2020}{2}$ $\qquad$ $x_2=\frac{2022-2020}{2}$

$x_1=2021$ $\qquad$ $x_2=1$

$x\in[1;2021]\Rightarrow$ мы всегда сможем распределить женщин, так как $1 \le x \le 2021$ — всегда верно.

Ответ: 2021.

№5

Пусть S_1 – кол-во напёрстков на нечётных местах, лежащих дном вверх, S_2 – на чётных местах. Заметим, что за каждый ход мы можем менять S_1 на 0, 2 или −2 ⇒ ⇒ чётность S_1 никогда не меняется. Но в конце игры $S_1 = 501$ – нечётно. Значит, начальный напёрсток должен быть на нечётной позиции.

Докажем, что если перевернуть 501-ый напёрсток, то можно выиграть.

№ хода	позиция
0	…0001000…
1	…0011100…
2	…0110100…
3	…0111110…
4	…1101110…
5	…1111010…
6	…011111110…

Алгоритм следующий:

На определённом ходу мы имеем отрезок из 1 нечётной длины. Перевернем соседей самого левого напёрстка, лежащего дном вверх. Наш отрезок разделился нулём. Однако заметим, что справа от нуля нечётное кол-во единиц. Тогда будем поочерёдно переворачивать соседей у напёрстка, стоящего справа от нуля. В итоге мы расширим наш отрезок на 1 в каждую сторону.

№ 6

$a^2+2b^2+3c^2=1$

$a=\sqrt{1-2b^2-3c^2}$

$z=2(1-2b^2-3c^2)\sqrt{1-2b^2-3c^2}+3b^3+4c^3\to min$

$z'_b=((2-4b^2-6c^2)\sqrt{1-2b^2-3c^2})'+(3b^3)'+(4c^3)'=0$

$(2-4b^2-6c^2)'\sqrt{1-2b^2-3c^2}+(2-4b^2-6c^2)\cdot$

$\cdot(\sqrt{1-2b^2-3c^2})'+9b^2=0$

$(-8b)\sqrt{1-2b^2-3c^2}+(2-4b^2-6c^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2b^2-3c^2}}\cdot$

$\cdot(1-2b^2-3c^2)'+9b^2=0$

$(-8b)\sqrt{1-2b^2-3c^2}+\sqrt{1-2b^2-3c^2}\cdot(-4b)+9b^2=0$

$9b^2-4b\cdot(2\sqrt{1-2b^2-3c^2}+\sqrt{1-2b^2-3c^2})=0$

$b=0$ или

$9b-12\sqrt{1-2b^2-3c^2}=0$

$3b=4\sqrt{1-2b^2-3c^2}$

$9b^2=16-32b^2-48c^2$

$41b^2+48c^2=16$

$$z_c' = \left(2(1-2b^2-3c^2)\sqrt{1-2b^2-3c^2} + 3b^3+4c^3\right)' = 0$$

$$(2-4b^2-6c^2)'\sqrt{1-2b^2-3c^2} + (2-4b^2-6c^2)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2b^2-3c^2}}\cdot(1-2b^2-3c^2)' + 12c^2 = 0$$

$$(-12c)\sqrt{1-2b^2-3c^2} + (\cancel{-6}\,c)\cdot\sqrt{1-2b^2-3c^2} +$$

$$+12c^2 = 0$$

$c = 0$ или $\quad -6\cdot\left(2\sqrt{1-2b^2-3c^2} + \sqrt{1-2b^2-3c^2} - 2c\right) = 0$

$$3\sqrt{1-2b^2-3c^2} = 2c$$

$$9-18b^2-27c^2 = 4c^2$$

$$18b^2+31c^2 = 9$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & b=0, \\ & 41b^2+48c^2=16; \end{aligned}\right. \\ \left[\begin{aligned} & c=0, \\ & 18b^2+31c^2=9; \end{aligned}\right. \end{cases}$$

— необходимое условие экстремума функции.

Пусть $A = z''_{xx}$, $B = z''_{xy}$, $C = z''_{yy}$

Тогда для достаточности условия нужно:

$AC > B^2$

$A = 82b$

$B = 96c$

$C = 62c$

$82b \cdot 96c > 62c$

Если $b = 0$ или $c = 0$ то условие не выполняется.

Значит, $\begin{cases} 41b^2 + 48c^2 = 16; \\ 18b^2 + 31c^2 = 9; \end{cases}$

$b^2 = \frac{9 - 31c^2}{18}$

$\frac{41 \cdot (9 - 31c^2)}{18} + 48c^2 = 16$

$20{,}5 - \frac{41 \cdot 31}{18} \cdot c^2 + 48c^2 = 16$

$c^2 \cdot \left(\frac{-407}{18}\right) = -4{,}5$

$c^2 = \frac{18 \cdot 4{,}5}{407} = \frac{81}{407}$

$$c = \frac{9}{\sqrt{407}}$$

$$b^2 = \frac{9 - 31 \cdot \frac{81}{407}}{18} = \frac{1152}{18 \cdot 407} = \frac{64}{407}$$

$$b = \frac{8}{\sqrt{407}}$$

$$a = \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{64}{407} - 3 \cdot \frac{81}{407}}$$

$$a = \sqrt{\frac{36}{407}}$$

$$a = \frac{6}{\sqrt{407}}$$

$$z = \frac{2 \cdot 216}{407 \cdot \sqrt{407}} + \frac{3 \cdot 512}{407 \cdot \sqrt{407}} + \frac{4 \cdot 729}{407\sqrt{407}} = \frac{4884}{407\sqrt{407}} =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{407}}$$

Проверка:

При $b=0$ и $c=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow z=2$;

При $b=0$ и $18b^2+31c^2=9 \Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{31}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \frac{124}{31\sqrt{31}}$$

$$\frac{12}{\sqrt{407}} \vee \frac{124}{31\sqrt{31}}$$

$$\frac{144}{407} \vee \frac{15376}{29791}$$

$$\frac{144}{407} - \frac{15376}{29791} = \frac{144 \cdot 29791 - 15376 \cdot 407}{407 \cdot 29791} =$$

$$= -\frac{1968128}{407 \cdot 29791} < 0 \Rightarrow \frac{12}{\sqrt{407}} < \frac{124}{31\sqrt{31}}$$

При $c = 0$ и $41b^2 + 48c^2 = 16 \Rightarrow b = \frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{41}} \Rightarrow z = \frac{246}{41\sqrt{41}}$$

$$\frac{12}{\sqrt{407}} \vee \frac{246}{41\sqrt{41}}$$

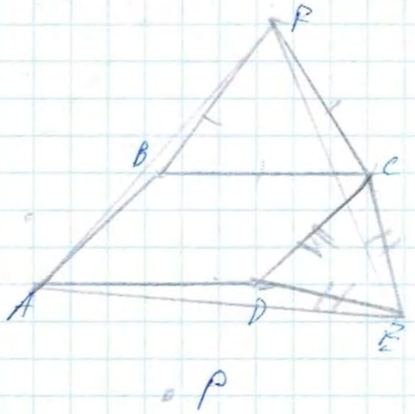
$$\frac{144}{407} - \frac{60516}{68921} = -\frac{14705388}{407 \cdot 68921} < 0 \Rightarrow \frac{12}{\sqrt{407}} < \frac{246}{41\sqrt{41}}.$$

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{407}}$ при $a = \frac{6}{\sqrt{407}}$; $b = \frac{8}{\sqrt{407}}$; $c = \frac{9}{\sqrt{407}}$.

№ 7.

Дано:
ABCD-паралл-грам
т. E лежит вне ABCD
△CDE-правильный
т. P - произвольная
Доказать:
PE ≤ AP+BP+AD-?

Решение:



1) На стороне BC наружу построим правильный △BFC. Докажем, что △AFE правильный.
2) При повороте на 60° $\overrightarrow{EC}$ переходит в $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{CF}$ - в $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.
Значит, при повороте на 60° $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}$ переходит в $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{EA}$.
Отсюда, $EA=EF$ и $\angle FEA=$

$=60°$. $\Rightarrow \triangle AEF$ правильный.

9) По теореме Помпею:

$PA + PF \geq PE$

$PF \leq PB + BF$ (по свойству ломаной, соед. концы отрезка) $= PB + AD$

$PE \leq PA + PF \leq PA + PB + AD$, ч.т.д.