# №1

Посчитаем вероятность по формуле: $\frac{\text{кол-во подходящих}}{\text{общее кол-во}}$.

Число А может быть одним из $(9\cdot8\cdot7)/3! = 84$ равновероятных чисел, а В $= (8\cdot7\cdot6)/3! = 56$ чисел.

Значит всего вариантов (исходов) $= 84\cdot56$.

Если А начинается с 9, то оно точно больше чисел которые начинаются с 9: $1\cdot8\cdot7/2! = 28$.

Для чисел начинающихся с меньших цифр кол-во чисел которых оно больше — равно его порядковому номеру − 1 (если упорядочить все возможные числа), то есть сумма будет $= 1+\ldots+55 = \frac{55\cdot56}{2} = 1540$,

А кол-во подходящих вариантов $= 28\cdot56+1540 = 3108$.

Вероятность $= \frac{3108}{84\cdot56} = \frac{4\cdot777}{4\cdot7\cdot168} = \frac{111}{168} = \frac{37}{56}$

Ответ $= \frac{37}{56} \approx 0,66$.

№2 (продолжение)

по условию она так же знает хотя бы $m$ женщин, а значит всего женщин $= 1+(k+1-m)+$ $+m = k+2$, противоречие, т.к. их $k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ один из пары может присоедениться в одну из комнат и получается, что $k+1$ пара займёт $k+2$ комнаты, переход доказан.

При $k=2021$ получаем требуемое.

№2

Ответ: $k = 2021$

При $k = 2022$ возможна ситуация, когда все мужчины знакомы друг с другом, тогда каждому потребуется отдельная комната, но ещё нужна хотя бы одна комната для женщин. В итоге: $2022 + 1 = 2023$ комнаты. Значит $k \le 2021$.

Докажем индукцией по $k$, что при $k$ супружеских парах хватит $k+1$ комнаты.

База: $k = 1$: в одну комнату ~~задоб~~ ~~заселяем~~ распределяем мужчину, а в другую женщину.

Переход: Пусть есть $(k+1)$ пара, удалим 1 любую пару $A$, тогда остальные могут ~~заселиться~~ распределиться в $k+1$ ~~камер~~ комнату по предположению индукции, а в паре $A$ остаётся одному из людей присоединиться к предыдущим комнатам, а другому зайти в „$k+2$".

Если ни один из них не может присоединиться к предыдущим комнатам, то это значит, что мужчина знаком хотя бы с $m$ мужчинами, а женщина не знает хотя бы $(k+1-m)$ женщин, при этом,

№3

$(2^{n-1}+1) \vdots n \Leftrightarrow 2^{n-1} \underset{n}{\equiv} -1$ (при $n \geq 2$)

Если $n=1$, то $2^0+1 \vdots 1$ $(2 \vdots 1 = 2)$.

Если $n$ – чётное, то $2^{n-1}+1 \not\vdots n$, т.к. нечётное число не может делится на чётное.

Заметим, что $n$ не может быть простым, т.к. $2^{n-1} \underset{n}{\equiv} 1$ (по МТФ), а должно быть $2^{n-1} \underset{n}{\equiv} -1$.

Пусть $n = pk$, где $k \vdots p$ и $p$ – простое. По МТФ:

$2^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{pk-k} \underset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{pk-1} \underset{p}{\equiv} 2^{k-1} \Rightarrow 2^{k-1} \underset{p}{\equiv} -1$

$\Rightarrow 4^{k-1} \underset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow (k-1)$ делится на показатель $q$. Тогда

$k = qu+1$; $2^{p\cdot(qu+1)-1} = 2^{qpu+(p-1)} \underset{p}{\equiv} 1$, т.к.

~~$qpu \vdots q$ и $(p-1) \vdots q$~~ $(qpu+(p-1)) \vdots q$, а значит,

$(2^q)^{\left(pu+\frac{p-1}{q}\right)} \underset{p}{\equiv} 1^{pu+\frac{p-1}{q}} = 1$. Противоречие $(1 \neq -1)$

## №4

Предположим, что максимум достигается когда $x \neq y$, тогда пусть что $x < y$. Заметим что $((x+\alpha)+(y-\alpha))^2 = (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, но $(x+\alpha)(y-\alpha) = xy + \alpha(y-x-\alpha) > xy$, если $\alpha > 0$ и $\alpha < y-x$, то есть при $\alpha = \frac{y-x}{2}$ мы получим, что $x' = y'$, а $x'^2+y'^2+\frac{9}{16}x'y' < x^2+y^2+\frac{9}{16}xy$ (т.к. $\frac{7}{16}x'y' > \frac{9}{16}xy$ и $(x+\alpha+y-\alpha)^2 = (x+y)^2$) $\Rightarrow |z'| > |z|$.

А значение выражения $x'y' + z'(x'+y') > xy + z(x+y)$. (т.к. $x'y' > xy$; $x'+y' = x+y$ и $|z'| > |z|$), (Очевидно, что если $x+y > 0$, то и $z > 0$, т.к. иначе $z(x+y) < -z(x+y)$ и мы рассматривали явно не максимум)

Мы получили противоречие, а значит если $x \neq y$, то $xy+yz+xz$ меньше мах. значения.

Заменим тогда $y$ на $x$ и получим.

$$2x^2+z^2+\frac{9}{16}x^2 = 1 \Rightarrow z = \sqrt{1-\frac{41}{16}x^2}$$

Тогда нужно узнать максимум от $x \cdot x + x \cdot z + xz =$

$$= x^2 + 2xz = x^2 + 2x\sqrt{1-\frac{41}{16}x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-41x^2 + 2x\sqrt{16-41x^2} + 8}{\sqrt{16-41x^2}}$$

$$\begin{cases} -41x^2+2x\sqrt{16-41x^2}+8=0 \\ 41x^2\neq 16 \end{cases}$$

$2x\sqrt{16-41x^2}=41x^2-8$ | возведем в квадрат

$64x^2-164x^4=1681x^4-656x^2+64$

$1845x^4+64-720x^2=0$

пусть $t=x^2$

$1845t^2+64-720t=0$

$$t=\frac{720\pm\sqrt{720^2-4\cdot 64\cdot 1845}}{2\cdot 1845}=\frac{360\pm\sqrt{11520}}{1845}=\frac{360\pm 48\sqrt5}{1845}=$$

$$=\frac{8}{41}\pm\frac{16\sqrt5}{615}$$

$x_{max}=\sqrt{\frac{16\sqrt5}{615}+\frac{8}{41}}$ ; $x^2+2x\sqrt{1-\frac{41}{16}x^2}=$

$$=\frac{16\sqrt5}{615}+\frac{8}{41}+2\sqrt{\frac{16\sqrt5}{615}+\frac{8}{41}}\sqrt{1-\frac{41}{16}\left(\frac{16\sqrt5}{615}+\frac{8}{41}\right)}=$$

$$=\frac{120+16\sqrt5}{615}+2\sqrt{\frac{120+16\sqrt5}{615}}\sqrt{1-\frac{5+2\sqrt5}{30}}\approx 1{,}08$$

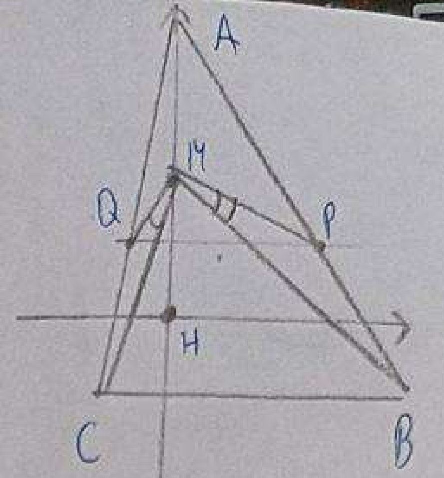
$$\frac{16\sqrt5}{615}+\frac{8}{41}+2\sqrt{\frac{16\sqrt5}{615}+\frac{8}{41}}\sqrt{1-\frac{41}{16}\left(\frac{120+16\sqrt5}{615}\right)}=$$

$$=\frac{16\sqrt5+120}{615}+2\sqrt{\frac{16\sqrt5+120}{615}}\sqrt{1-\frac{5+2\sqrt5}{30}}=$$

$$\frac{16\sqrt5+120}{615}+2\sqrt{\frac{16\sqrt5+120}{615}}\sqrt{\frac{25-2\sqrt5}{30}}$$

$\frac{4}{41}(2+3\sqrt5)\approx 0{,}85$ Ответ: $\frac{8+12\sqrt5}{41}$

По свойству точки M мы знаем, что $AM = MH =$ расстоянию от точки O до BC. Но т.к. QO и OP ∥ BC ⇒ расстояние от Q до BC = от P до BC = от O до BC = MH.




Введём декартову систему координат с центром в точке H, ось y (ординат) проходит через A, ось x (абсцисс) ∥ BC. Пусть тогда точки A и B имеют координаты: $A(0; y_A)$; $B(x_B; y_B)$; тогда $C = \left(\frac{y_B}{x_B}(y_A - y_B); y_B\right)$, координата y у P и Q будет $\left(y_A \cdot \frac{1}{2} + y_B\right)$, т.к. $MH = Q(BC) = P(BC)$. Прямая AC имеет уравнение

$y = \frac{(y_B - y_A)x_B}{y_B(y_A - y_B)}x + y_A = y_A - \frac{x_B}{y_B}x$; тогда $y_A\frac{1}{2} + y_B = y_A - \frac{x_B}{y_B}x_Q$ ⇒

$x_Q = \frac{(y_A - 2y_B)y_B}{2x_B}$; $BC: y = \frac{y_B - y_A}{x_B}x + y_A$; $x_P = \frac{(2y_B - y_A)x_B}{2(y_B - y_A)}$;

$M\left(0; \frac{y_A}{2}\right)$; $\angle QMC = \angle(\vec{MQ}; \vec{MC})$; $\vec{MQ} = \left(\frac{(y_A - 2y_B)y_B}{2x_B}; y_B\right)$

$\vec{MC} = \left(\frac{y_B(y_A - y_B)}{x_B}; \frac{2y_B - y_A}{2}\right)$; $\vec{MP} = \left(\frac{(2y_B - y_A)x_B}{2(y_B - y_A)}; y_B\right)$;

$\vec{MB} = \left(x_B; y_B - \frac{y_A}{2}\right)$; $\cos\angle QMC = \frac{\vec{MQ}\cdot\vec{MC}}{|\vec{MQ}|\cdot|\vec{MC}|}$; $\cos\angle PMB = \frac{\vec{MP}\cdot\vec{MB}}{|\vec{MP}|\cdot|\vec{MB}|}$

$$\cos\angle QMC = \frac{\frac{(y_A - 2y_B)y_B \cdot y_B(y_A - y_B)}{2x_B^2} + y_B\cdot\frac{2y_B - y_A}{2}}{\sqrt{\frac{(y_A - 2y_B)^2 y_B^2}{4x_B^2} + y_B^2}\cdot\sqrt{\frac{y_B^2(y_A - y_B)^2}{x_B^2} + \frac{(2y_B - y_A)^2}{4}}};$$

$$\cos\angle PMB = \frac{\frac{(2y_B - y_A)x_B^2}{2(y_B - y_A)} + y_B\cdot\frac{2y_B - y_A}{2}}{\sqrt{\frac{(2y_B - y_A)^2 x_B^2}{4(y_B - y_A)^2} + y_B^2}\cdot\sqrt{x_B^2 + \left(\frac{2y_B - y_A}{2}\right)^2}}$$

При приведении подобных слагаемых и сокращении получаем, что $\cos\angle QMC = \cos\angle PMB$, а т.к. оба угла меньше 180°, то это значит, что $\angle QMC = \angle PMB$.