Задача №1

Заметим, что если для числа A выбрана цифра 9, то $A > B$, т.к. цифры записываются по убыванию, 9 это максимальная цифра $\Rightarrow$ в A она будет стоять в разряде сотен, а в числе B в разряде сотен будет стоять цифра < 9, т.к. в числе B не может быть 9. Вероятность того, ~~ч~~ что 9 присутствует в A равна отношению кол-ва чисел полученных по алгоритму из условия содержащих 9, ~~кол-ва всех~~ к кол-ву всех чисел, которые можно получить по алгоритму. Кол-во ~~тр~~ трехзначных чисел, полученных по алгоритму равно кол-ву трехэлементных подмножеств множества цифр, из которых выбирают ~~3~~ 3 для составления числа, т.к. упорядоченное по убыванию множество однозначно задает число, а число из 3 различных цифр однозначно задает 3-элементное множество. Т.е. вариантов числа A C_9^3. Если в нем содержится 9, то место 9 задано однозначно $\Rightarrow$ таких чисел C_8^2.

Если рассмотреть A, не содержащие 9, то это подмножество чисел A равно множеству чисел ~~В~~ B. Обозначим такие числа за A'. Тогда вероятность того, что $A' > B$ равна вероятности того, что $A' < B$, за счет симметричности множеств. Случаев равенства C_8^3, т.к. одно выбранное число однозначно задает второе. Всего пар чисел $C_8^3 \cdot C_8^3$. Тогда, вероятность того, что $A' > B$ равна $\dfrac{\frac{C_8^3 \cdot C_8^3}{2} - \frac{C_8^3}{2}}{C_8^3 \cdot C_8^3} =$

$= \dfrac{C_8^3 - 1}{2 \cdot C_8^3}$. Вероятность того, что при получении числа A получится число из подмножества A' равна

$$\frac{C_9^3 - C_8^2}{C_9^3} = \frac{C_8^3 + C_8^2 - C_8^2}{C_9^3} = \frac{C_8^3}{C_9^3}.$$

Вероятность того, что $A > B$ складывается из двух полученных вероятностей, т.е. равна

$$\frac{C_8^2}{C_9^3} + \frac{C_8^3}{C_9^3} \cdot \frac{C_8^3 - 1}{2 \cdot C_8^3} = \frac{\frac{8!}{6!\,2!}}{\frac{9!}{6!\,3!}} + \frac{\frac{8!}{5!\,3!}}{\frac{9!}{6!\,3!}} \cdot \frac{\frac{8!}{5!\,3!} - 1}{2 \cdot \frac{8!}{5!\,3!}} =$$

$$= \frac{28}{84} + \frac{56}{84} \cdot \frac{56 - 1}{112} = \frac{1}{3} + \frac{55}{168} = \frac{56 + 55}{168} = \frac{111}{168} = \frac{37}{56}.$$

Ответ: $\frac{37}{56}$.

Задача №2

Построим бесконечную таблицу:

p_1	p_2	p_3	p_4	$\dots$
$2p_1$	$2p_2$	$2p_3$	$2p_4$	
$3p_1$	$3p_2$	$3p_3$	$3p_4$	
$4p_1$	$4p_2$	$4p_3$	$4p_4$	
$\vdots$				

p_1 - первое в ряду натуральных чисел простое, p_2 - второе, и т.д. Рассмотрим любое натуральное число >1, n. По ОТА $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, $q_1, q_2, \dots q_k$ - простые и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k > 0$. В первой строке таблицы находятся все простые числа $\Rightarrow \exists\, l$ $p_l = q_1$. В столбце с номером l есть все натуральные числа, кратные $p_l \Rightarrow$ в нем есть $n \Rightarrow$ $\Rightarrow$ в таблице есть все натуральные числа >1. При этом n содержится только в столбцах с простыми $q_1, q_2, \dots, q_k$, т.е. каждое натуральное число >1 записано в таблице конечное число раз.

Числа вида $m \cdot p_i \cdot p_j$ $(m \in N)$ будем называть переходными между столбцами с номерами i и j (столбцы пронумерованы в соответствии с индексами p в 1 строке). Заметим, что для любых ~~двух~~ двух столбцов переходных чисел бесконечно много, т.к. чисел m бесконечно много.

Составим алгоритм нумерации натуральных чисел так, чтобы в последовательности натуральных чисел согласно нумерации любые 2 соседних числа не были взаимно простыми. Пусть шагом алгоритма будет присвоение очередного номера всем клеткам таблицы, в которых записано некоторое натуральное число n.

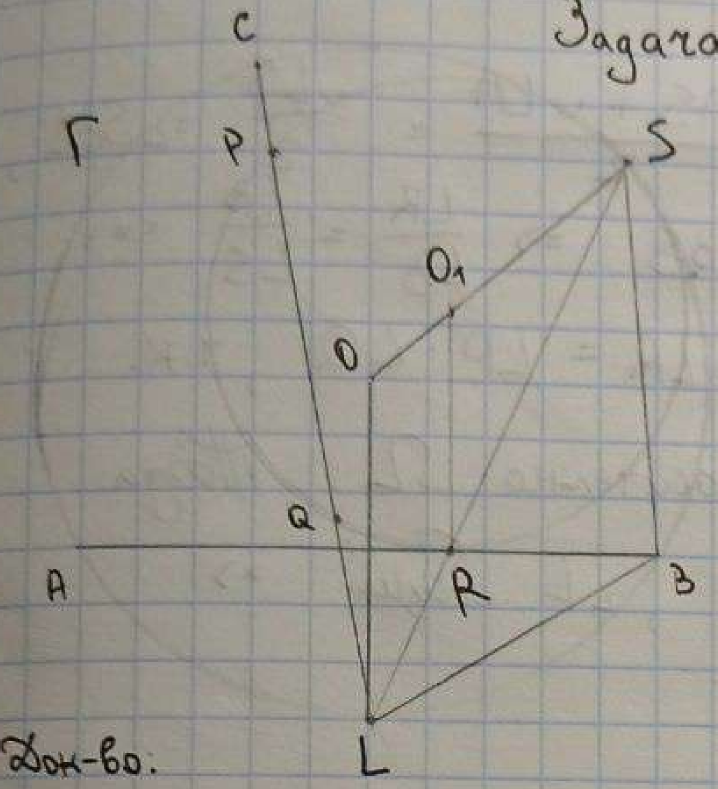
Разобьем шаги алгоритма на серии: серия 1, серия 2, ..., серия k, ... Серия шагов k заканчивается тогда, когда все клетки левого верхнего квадрата таблицы размером $k \times k$ пронумерованы. Доказав, что k-тая серия шагов может быть осуществима согласно условию нумерации, мы докажем существование алгоритма, строящего последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$, такую, что любые два соседние числа не являются взаимно простыми.

Докажем это по индукции.

База: ~~Вы~~ присвоим числу p_1 номер 1. Левый верхний квадрат 1×1 пронумерован $\Rightarrow$ 1 серия шагов закончена.

Переход: пусть $(k-1)$-я серия шагов закончена. Тогда докажем, что ~~первая~~ k-тая серия шагов может быть закончена. Заметим, что в качестве шага можно пронумеровать любое еще не пронумерованное число в столбце с последним пронумерованным ~~столбцом~~ числом, т.к. их общим множителем будет простое число, стоящее на пересечении 1 строки и этого столбца. С помощью переходного числа перейдем в первый слева столбец, в котором среди k верхних чисел не все пронумерованы. Затем с помощью шагов по столбцу пронумеруем ~~вер~~ оставшиеся из k верхних чисел в произвольном порядке. Повторим операции перехода между столбцами и нумерования чисел в столбце, пока ~~левый~~ каждая клетка в левом верхнем квадрате размером k×k не будет пронумерована — индукция доказана.

Задача №3



Дано:

Г - опис. окр. △ABC

Ω кас. AB

Ω кас. Г

CP - бисс. ∠ACB

Док. ∠ABP = ∠QBC

Док-во:

Обозначим центр Г за O, центр Ω за O_1, точку пересечения CP с Г за L, точку касания AB окружностью Ω за R, точку касания Г окружностью Ω за S. L - середина дуги AB ⇒ касательная через точку L к Г параллельна AB ⇒ $OL \parallel O_1R$, как радиусы, перпендикулярные параллельным касательным. OS и O_1S перпендикулярны касательной, проведенной через точку S к Г (одновременно и Ω) ⇒ O, O_1 и S лежат на одной прямой. LOS - равнобедренный треугольник (OS = OL, как радиусы) с ∠OSR, RO_1S аналогично равнобедренный с тем же углом при основании ⇒ по 2 углам $\triangle LOS \sim \triangle RO_1S$. $OL \parallel O_1R$ и $\angle SRO_1 = \angle SLO$ ⇒ S, R, L лежат на одной прямой.

$\angle LRB = \dfrac{\smile AS + \smile LB}{2} = \dfrac{\smile AS + \smile LA}{2} = \dfrac{\smile LS}{2} = \angle SBL$,

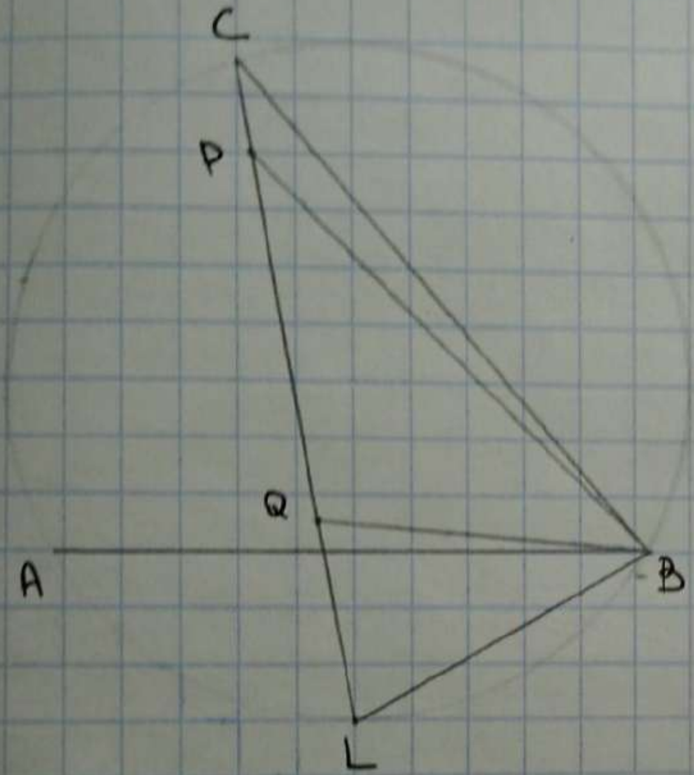
$\angle L$ общий $\Rightarrow \triangle LRB \sim \triangle LBS \Rightarrow \dfrac{LR}{LB} = \dfrac{LB}{LS} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow LB^2 = LS \cdot LR$. $LS \cdot LR = LP \cdot LQ$, т.к.

это степень точки L относительно Ω. Тогда

$LB^2 = LP \cdot LQ \Rightarrow \dfrac{LQ}{LB} = \dfrac{LB}{LP}$, $\angle L$ общий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle LQB \sim \triangle LBP$.



$\angle BPL = \angle BCP + \angle CBP$, как внешний. $\angle QBL = \angle LBA + \angle ABQ$.

$\triangle LQB \sim \triangle LBP \Rightarrow \angle BPL = \angle QBL \Leftrightarrow \angle BCP + \angle CBP = \angle LBA + \angle ABQ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\smile BL}{2} + \angle CBP = \dfrac{\smile LA}{2} + \angle ABQ \Leftrightarrow \angle CBP = \angle ABQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABP = \angle ABQ + \angle QBP = \angle CBP + \angle QBP = \angle QBC$, ч.т.д.

Задача №6

При неотрицательных x_1, x_2, x_3 верно

$$\sqrt[3]{\frac{c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 + c_3 \cdot x_3^3}{c_1 + c_2 + c_3}} \geq \sqrt[2]{\frac{c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 + c_3 \cdot x_3^2}{c_1 + c_2 + c_3}}.$$

Обозначим $x_1 = k_1 a$, $x_2 = k_2 b$, $x_3 = k_3 c$, тогда

$$\sqrt[3]{\frac{c_1 k_1^3 a^3 + c_2 k_2^3 b^3 + c_3 k_3^3 c^3}{c_1 + c_2 + c_3}} \geq \sqrt[2]{\frac{c_1 k_1^2 a^2 + c_2 k_2^2 b^2 + c_3 k_3^2 c^2}{c_1 + c_2 + c_3}}$$

Решим систему уравнений:
$$\begin{cases} c_1 k_1^3 = 2 \\ c_2 k_2^3 = 3 \\ c_3 k_3^3 = 4 \\ c_1 k_1^2 = 1 \\ c_2 k_2^2 = 2 \\ c_3 k_3^2 = 3 \end{cases}$$

$$\frac{c_1 k_1^3}{c_1 k_1^2} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow k_1 = 2; \quad \frac{c_1 k_2^3}{c_1 k_2^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k_2 = \frac{3}{2};$$

$$\frac{c_1 k_3^3}{c_1 k_3^2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow k_3 = \frac{4}{3}.$$

$$c_1 \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{4}; \quad c_2 \cdot \frac{9}{4} = 2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{8}{9};$$

$c_3 \cdot \frac{16}{9} = 3 \Leftrightarrow c_3 = \frac{27}{16}$. Рассмотрим неравенство с полученными значениями $k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3$:

$$\sqrt[3]{\frac{2a^3 + 3b^3 + 4c^3}{\frac{1}{4} + \frac{8}{9} + \frac{27}{16}}} \geq \sqrt[2]{\frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{\frac{1}{4} + \frac{8}{9} + \frac{27}{16}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^3 + 3b^3 + 4c^3}{\frac{407}{144}} \geq \left(\frac{1}{\frac{407}{144}}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 + 3b^3 + 4c^3 \geq \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{407}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 + 3b^3 + 4c^3 \geq \frac{12}{\sqrt{407}}$$

Неравенство $\sqrt[3]{\frac{c_1\cdot x_1^3+c_2\cdot x_2^3+c_3\cdot x_3^3}{c_1+c_2+c_3}} \geq \sqrt[2]{\frac{c_1\cdot x_1^2+c_2\cdot x_2^2+c_3\cdot x_3^2}{c_1+c_2+c_3}}$

обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$x_1=x_2=x_3 \Leftrightarrow k_1 a = k_2 b = k_3 c \Leftrightarrow 2a=\frac{3}{2}b=\frac{4}{3}c.$

$\exists$ $a=6x$, тогда $b=8x$, $c=9x$.

$(6x)^2+2\cdot(8x)^2+3\cdot(9x)^2=1 \Leftrightarrow 407x^2=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{407}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\frac{6}{\sqrt{407}}$, $b=\frac{8}{\sqrt{407}}$, $c=\frac{9}{\sqrt{407}}$ – значения

при a, b и c при которых выражение $2a^3+3b^3+4c^3$

принимает минимальное значение.

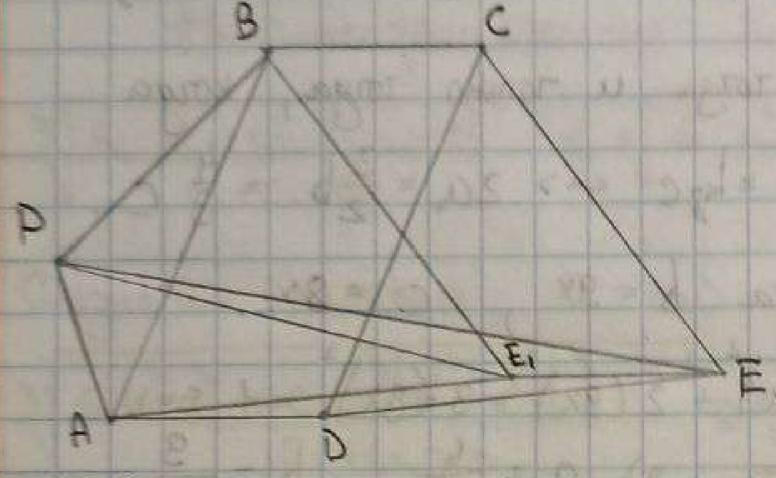
$2\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{407}}\right)^3+3\cdot\left(\frac{8}{\sqrt{407}}\right)^3+4\cdot\left(\frac{9}{\sqrt{407}}\right)^3=\frac{4884}{407\sqrt{407}}=\frac{12}{\sqrt{407}}$

Полученное значение совпадает с минимальным

возможным из оценки.

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{407}}$

Задача №7



Дано:

$ABCD$ - параллелограмм

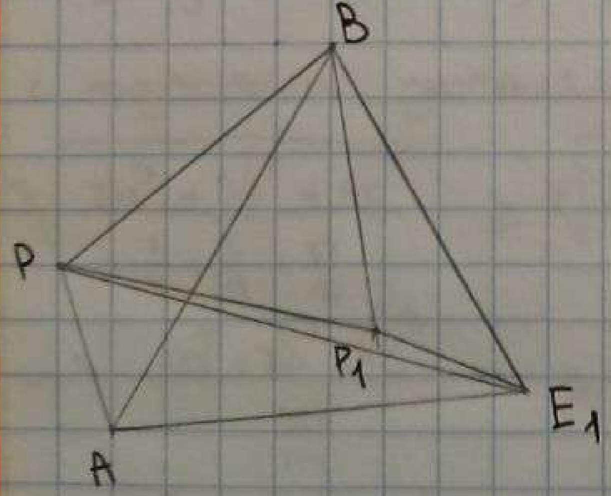
$\triangle CDE$ - правильный

Док. $PA + PB + AD \geq PE$

Док-во:

~~Нерасея~~ Совершим параллельный перенос $\triangle CDE$ так, чтобы C перешла в B, D перешла в A, тогда E перейдёт в некоторую точку E_1. По неравенству треугольника PEE_1 $PE_1 + E_1E \geq PE \Leftrightarrow PE_1 + AD \geq PE \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~док.~~ нер-во $PA + PB + AD \geq PE$ док следует из нер-ва $PA + PB \geq PE_1$.



Повернем треугольник APB на $60°$ относительно точки B так, чтобы A перешла в E_1, тогда P

перейдет в некоторую точку P_1. $PB = BP_1$, $\angle PBP_1 = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PBP_1$ равносторонний $\Rightarrow PB = PP_1$. $PA = P_1E_1$ (т.к.

$\triangle APB = \triangle E_1P_1B$). Тогда по неравенству треугольника

PP_1E_1 $PP_1 + P_1E_1 \geq PE_1 \Leftrightarrow PB + PA \geq PE_1$, ч.т.д.