№ 1

Посчитаем количество способов выбрать число A, их $\frac{9\cdot8\cdot7}{6}$ т.к. нужно выбрать 3 различные цифры из ~~8~~ 9, причем порядок не имеет значения т.к. цифры всё равно распределятся по убыванию. Тогда количество способов выбрать число B — $\frac{8\cdot7\cdot6}{6}$, т.к. цифр 8, а не 9. $\frac{9\cdot8\cdot7}{6}=84$; $\frac{8\cdot7\cdot6}{6}=56$. Теперь посчитаем количество случаев, когда A больше B.

$84-56=28$ чисел A, где есть 9, каждое из этих чисел больше любого числа B т.к. 9 стоит в разряде сотен, а в числах B 9 вообще не встречается, тогда уже $56\cdot28$ случаев, когда $A>B$. Теперь

рассмотрим остальные числа A:
~~для 521 нет ни~~ ~~наименьшего~~ числа расставим числа A в порядке возрастания. для первого числа нет ни одного числа B, которого оно больше, для второго числа A есть одно число B, которого оно больше... для 56 числа A есть 55 чисел B, которого оно больше, тогда кол-во случаев:
$\frac{56(55+0)}{2}$. Мы посчитали случаи для чисел A с девятками и без них, где A>B, тогда всего таких случаев: $28\cdot 56+\frac{56(55+0)}{2}$
теперь осталось посчитать количество всех возможных случаев: $84\cdot 56$ и поделить

$$\frac{28\cdot 56+\frac{56(55+0)}{2}}{84\cdot 56}=\frac{37}{56}$$

Ответ: $\frac{37}{56}$

Ответ: да, существует. В качестве доказательства приведу такую последовательность. Буду строить её так:

1) первым числом возьмём 2

2) находим наименьшее число $x \geq 2$, которое ещё не было добавлено в последовательность. Пусть последнее добавленное число равно y. Тогда сначала добавим в последовательность наименьшее число такое, что оно кратно НОК(x, y) и ещё не было добавлено в последовательность. Если это ~~число~~ число не совпало с числом x, то добавим

число x.

Будем выполнять 2 шаг бесконечно. Так, последовательность содержит все натуральные числа не более 1 раза, кроме единицы, причем любые 2 соседних числа не взаимно просты.

№6

пусть:

$a = \frac{1}{2}x$

$b = \frac{2}{3}y$

$c = \frac{3}{4}z$

тогда:

$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{8}{9}y^2 + \frac{27}{16}z^2 = 1$

$2a^3 + 3b^3 + 4c^3 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{8}{9}y^3 + \frac{27}{16}z^3$

умножим оба выражения на 144:

$36x^2 + 128y^2 + 243z^2 = 144$

$36x^3 + 128y^3 + 243z^3$

по неравенству о средних:

$$\sqrt[3]{\frac{36x^3+128y^3+243z^3}{407}} \geqslant \sqrt{\frac{36x^2+128y^2+243z^2}{407}}$$

$$\frac{36x^3+128y^3+243z^3}{407} \geqslant \frac{144\sqrt{144}}{407\sqrt{407}}$$

$$144(2a^3+3b^3+4z^3) \geq \frac{\cancel{144\sqrt{144}}\ 144\cdot 12}{\sqrt{407}}$$

$$2a^3+3b^3+4z^3 \geq \frac{12}{\sqrt{407}} = \frac{12\sqrt{407}}{407}$$

Ответ: $\frac{12\sqrt{407}}{407}$.

№4

Докажем, что для k пар нам хватит $k+1$ комнаты, чтобы разместить их в бане. Будем доказывать индукцией по k.

База для $k=1$ выполнена т.к. мужчине и женщине хватит 2 комнат на двоих. Предположим, что для $k=n$ предположение индукции выполнено. Докажем утверждение индукции для $k=n+1$.

Исходя из предположения индукции, мы можем расположить n супружеских пар в $n+1$ комнате. Добавим оставшихся мужчину и женщину (супружеская пара) в те комнаты,

в которые мы их можем добавить. Если для кого-то из них не нашлось подходящей комнаты, то мы выделим для этого человека отдельную комнату.
Если потребы для одного человека нашлась подходящая комната, то мы выделим не более одной новой комнаты, а значит кол-во комнат не превысит n+2. Если же для обоих супругов не нашлась комната, то в каждой женской комнате есть незнакомая женщина, а в каждой мужской - незнакомый мужчина. Так как незнакомая женщина и незнакомый муж-

чика образовать супружескую пару, ~~оти все пре~~ каждый из них состоит в разных супружеских парах, значит имеющихся комнат не превосходит n. Тогда мы выделим по одной комнате этой оставшейся супружеской паре и ~~их~~ комнат станет ~~$n+2$~~ $n+2$, что не противоречит утверждению индукции. ~~Таким образом в 2022 комнаты мы можем поселить не более 2021 супружеской пары.~~

~~Ответ: 2021~~ Теперь покажем, что в некотором случае 2022 пары мы не можем поселить в 2022 комнаты. Рассмотрим случай, когда

все пары незнакомы друг с другом,
тогда для женщин потребуется
2022 комнаты и одна для мужчин,
но $2022+1>2022$. Таким образом,
в 2022 комнаты мы не гаранти-
рованно можем поселить не
более 2021 пару.

Ответ: 2021

№5

Визирь не может перевернуть ~~фиш~~ напёрсток с края т.к. тогда Падишах не сможет превысить кол-во перевернутых больше 2: ● ○ ○ ○... → ● ● ○ ○... → ○ ● ● ○...

Также Визирь не может перевернуть напёрсток стоящий на четной позиции, потому что тогда вначале будет 0, то есть ~~нечет~~ четное кол-во перевернутых напёрстков на нечетных ~~поверхностях~~ позициях, и к концу игры их должно стать 501, то есть нечетное кол-во, а четность ~~фишек~~ кол-ва напёрстков на нечетных позициях ни при каких действиях Падишаха измениться не может. их количество либо увеличивается на 2, либо уменьшается на 2, либо не меняется:

1) ○ ◉ ○ 2) ● ◉ ● 3) ● ◉ ○

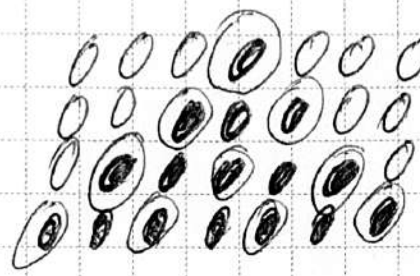
неч чет неч   неч чет неч   неч чет неч

чётность кол-ва перевёрнутых напёрстков может измениться только если перевернуть соседа крайней фишки, но этот „сосед" „сидит" на чётной позиции.

Если Везирь перевернёт напёрсток, находящийся посередине, можно применить следующую стратегию: перед ~~тобой~~ нами ряд из $2n+1$ перевёрнутого напёрстка, перевернём соседей напёрстков, находящихся через одного, начиная с края, таким образом ~~ряд~~ длина ряда увеличится на 1 с обеих сторон.

повторять этот шаг, пока не перевернём все 1001 напёрсток.

пример:



$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 0+1 \\ 2\cdot 1+1 \\ 2\cdot 2+1 \\ 2\cdot 3+1 \end{array}\right\} \text{длины рядов}$$

Эта стратегия работает если начать с середины т.к. с каждым шагом длина ряда увеличивается на 1 в каждую сторону.

Ответ: наперсток посередине