(1) $x^4-2x^3+3x^2-2x+3=0$

$(x^4-2x^3+x^2)+(x^2-2x+1)+x^2+2=0$

$x^2(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)+x^2+1+1=0$

$x^2(x-1)^2+(x-1)^2+x^2+1+1=0$

$(x-1)^2(x^2+1)+x^2+1+1=0$

$(x^2+1)((x-1)^2+1)+1=0$

$(x^2+1)((x-1)^2+1)=-1$

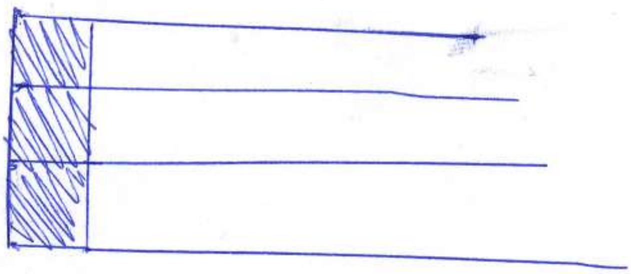
Но $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1>0$

$(x-1)^2\geq 0 \Rightarrow (x-1)^2+1>0.$

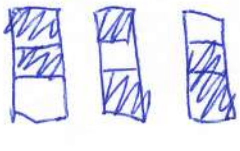
Тогда $(x^2+1)((x-1)^2+1)>0 \Rightarrow$ уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет действительных корней $(\varnothing)$.

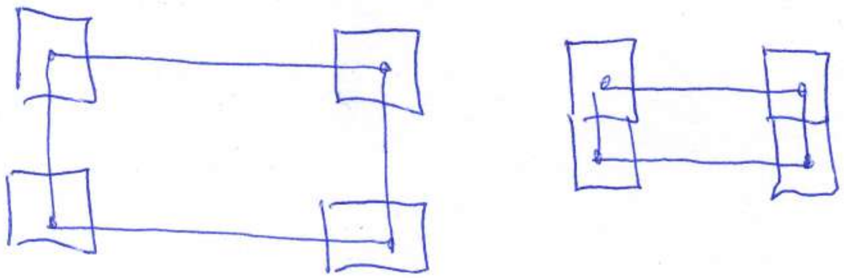
② Докажем, что $n<5$. Предположим обратное. Пусть $n \geq 5$. Тогда, по принципу Дирихле в первом столбце найдутся ≥ 3 клетки одного цвета. (Иначе всего клеток было бы $\leq 2\cdot 2=4$). Рассмотрим 3 строки с этими клетками:



(Они могут быть не рядом - это неважно). Без ограничения общности считаем их чёрными. Заметим, что есть всего $2^3=8$ способов раскрасить прямоугольник 1×3 в 2 цвета (каждую клетку мы либо красим, либо не красим; всего клеток - 3). Заметим, что в наших трёх строках на рисунке не могут присутствовать полоски с двумя чёрными клетками (иначе мы берём 2 клетки чёрные из этой полоски, и 2 чёрные соответственные из нашей первой полоски). Образуется прямоугольник, в котором все угловые клетки чёрные. Противоречие. Значит, остаётся $8-3-1$ полоска $=4$ варианта. Заметим, что 2 одинаковые полоски не могут присутствовать -

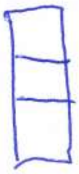
 - полоски, где 2 чёрных клетки.

в каждой есть ≥ 2 клетки одного цвета, которые будут располагаться так:

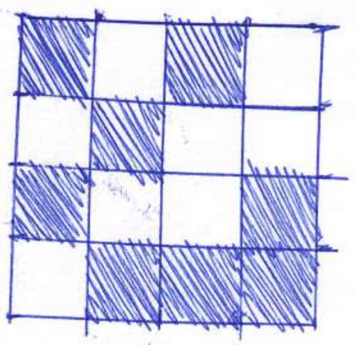


или

Образуя прямоугольник.

Значит, если $n \geq 5$, одна полоска у нас есть. Можно добавить ещё ≤ 4 => всего полосок ≤ 5. А их должно быть ≥ 5 => их ровно 5. В частности, присутствует полоска . Но тогда есть ещё полоски, где 2 белых клетки в наших рассматриваемых 3 строках. Тогда образуется прямоугольник. Противоречие => $n \leq 4$.

Пример на $n = 4$:



Несложно понять, что пример действительно работает.

Ответ: $n = 4$.

(3) Если все цифры в 30-значном числе $\geqslant 5$, то это цифры $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Найдём остатки от деления

$5^{40}, 6^{40}, 7^{40}, 8^{40}$ и 9^{40} на 11:

1) $9^{40} \underset{11}{\equiv} (-2)^{40} \underset{11}{\equiv} 2^{40} \underset{11}{\equiv} \left(2^5\right)^8 \underset{11}{\equiv} 32^8 \underset{11}{\equiv} (-1)^8 \underset{11}{\equiv} 1^8 \underset{11}{\equiv} 1.$

2) $8^{40} \underset{11}{\equiv} (-3)^{40} \underset{11}{\equiv} 3^{40} \underset{11}{\equiv} \left(3^2\right)^{20} \underset{11}{\equiv} 9^{20} \underset{11}{\equiv} (-2)^{20} \underset{11}{\equiv} 2^{20} \underset{11}{\equiv} \left(2^5\right)^4 \underset{11}{\equiv}$

$\underset{11}{\equiv} 32^4 \underset{11}{\equiv} (-1)^4 \underset{11}{\equiv} 1^4 \underset{11}{\equiv} 1.$

3) $7^{40} \underset{11}{\equiv} (-4)^{40} \underset{11}{\equiv} 4^{40} \underset{11}{\equiv} \Big(\underbrace{2^{40}}_{\text{из первого равенства}}\Big)^2 \underset{11}{\equiv} 1^2 \underset{11}{\equiv} 1.$

4) $6^{40} \underset{11}{\equiv} \underbrace{3^{40}}_{\substack{\text{из второго}\\ \text{сравнения}\\ \text{по модулю}}} \cdot \underbrace{2^{40}}_{\substack{\text{из первого}\\ \text{сравнения}\\ \text{по модулю}}} \underset{11}{\equiv} 1 \cdot 1 \underset{11}{\equiv} 1$

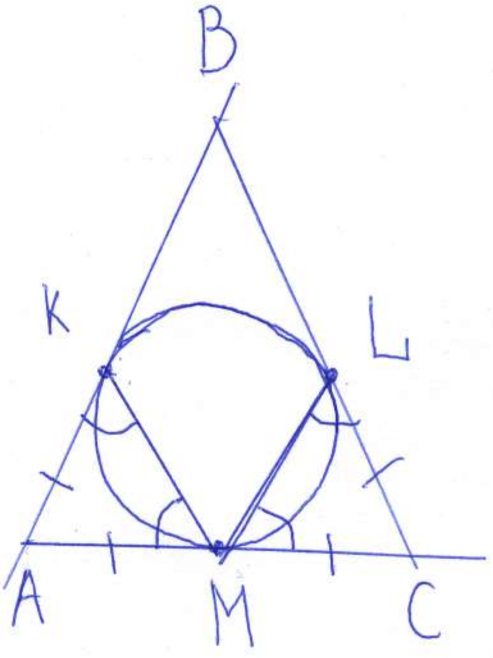
5) $5^{40} \equiv (-6)^{40} \equiv \underbrace{6^{40}}_{\substack{\text{из четвёртого}\\ \text{сравнения по модулю}}} \equiv 1$

Значит, любая цифра числа $\underset{11}{\equiv} 1$, а значит, сумма всех 40-ых степеней 30-и чисел: $\equiv 30 \equiv 8$. Т.к. сумма цифр $\not\vdots\ 11$, ни при каком выборе цифр " числа "

Так как $143 = 11 \cdot 13$ $(143 \vdots 11)$, то сумма 40-х степеней нашего трёхзначного числа никогда не делится на 143. А значит, раз такого числа нет, то теорема бессмысленна (неверна).

Ответ: нет, неверна.

4



Пусть M - середина стороны AC. Тогда из симметрии равнобедренного треугольника M - точка касания ($\triangle ABC$) вписанной в $\triangle ABC$ окружности со стороной AC.

$\Rightarrow AM = MC$;

$AM = AK$;

$CM = CL$ - отрезки касательных, проведённых из точки на окружность равны.

Получим: $\triangle AMK$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle AMK = \angle AKM = \alpha \Rightarrow$

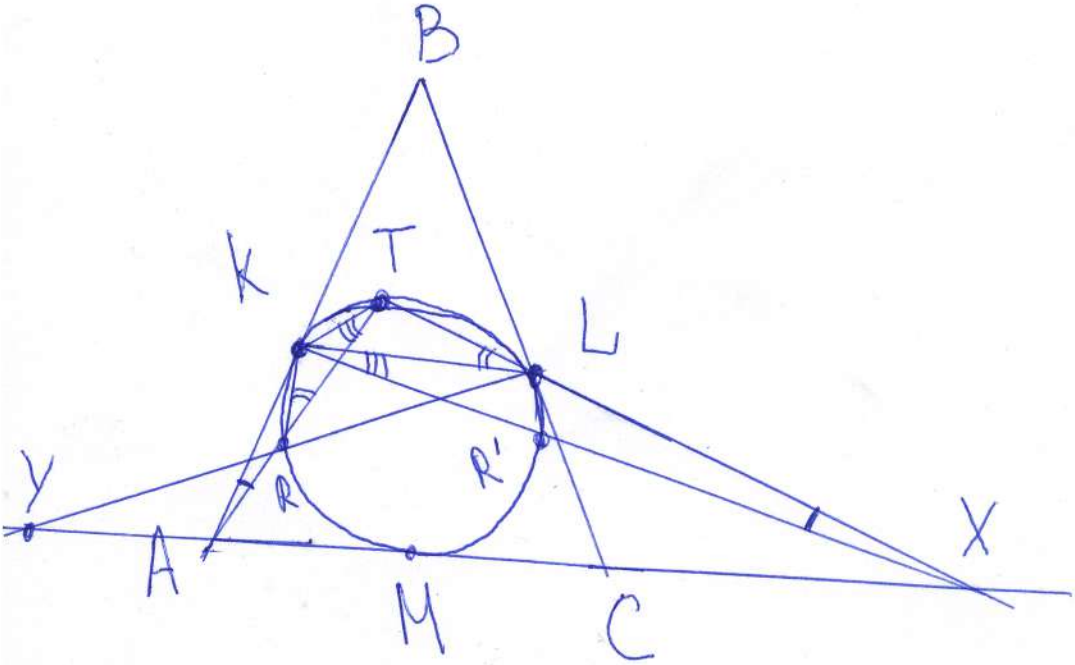
$\Rightarrow \angle KAM = 180^\circ - 2\alpha$.

Поскольку $\angle BAC = \angle BCA$ $(AB = BC) \Rightarrow \angle CML = \angle CLM =$

$= \alpha$.

Тогда $\angle KML = 180^\circ - 2\alpha = \angle BAC = \angle BCA$. Поскольку $\angle BAC, \angle BCA$ - острые (углы при основании равнобедренного треугольника) $\Rightarrow \angle KML < 90^\circ \Rightarrow \smile KL$, на которую он опирается $< 180^\circ \Rightarrow$ она меньшая.

Значит, точка T будет выбрана так, как показано на рисунке:



Соединим точки X и K. Пусть XK пересекает окружность в точке R'. $\triangle XLR' \sim \triangle XKT$ по двум углам (из вписанности четырёхугольника $KTLR'$: $\angle TKR' = \angle XLR'$; $\angle KTL = \angle LR'X$).

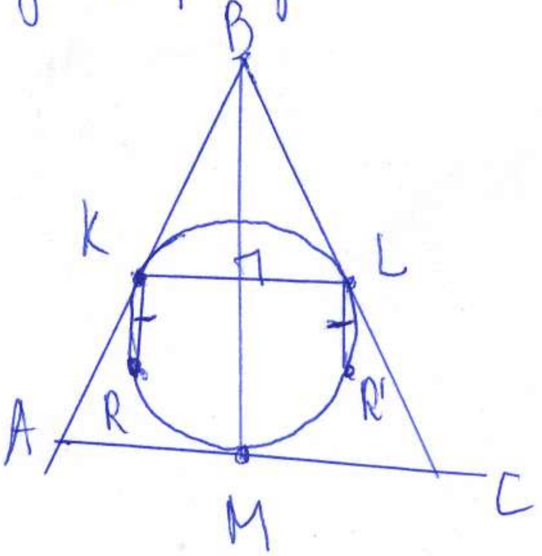
Значит, $\dfrac{XL}{XK} = \dfrac{LR'}{KT}$.

$\triangle ARK \sim \triangle AKT$ по двум углам ($\angle KAT$ - общий, $\angle RKA = \angle KTR$; угол между касательной и хордой равен вписанному, опирающемуся на эту хорду)

Значит, $\dfrac{KT}{KR} = \dfrac{AT}{AK}$. Четырёхугольник $MKTL$ - вписанный $\Rightarrow \angle KTL = 180^\circ - \angle KML$. Но $\angle KML = \angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC + \angle KTX = 180^\circ \Rightarrow$ четырёхугольник $AKTX$ - вписанный. Значит, $\angle TXK = \angle KAT$; $\angle KRT = \angle TLK$ (вписанные углы, опираются на одну и ту же дугу). $\angle TLK = \angle KRT =$
$= \angle LXK + \angle LKX = \angle AKR + \angle KAR$ (внешние). Отсюда следует, что $\angle LKX = \angle RKA = \angle KTA$. $\Rightarrow KR = LR'$. Получим

такую картину:



K симметрично L отн. высоты, медианы или биссектрисы BM

Мы взяли ниже KL точки R и R' такие, что KR=LR'.

А значит, R симметрична R' относительно BM.

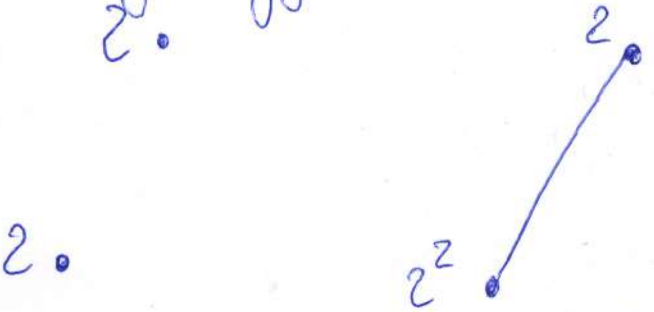
=> KR' симметрично ~~BM~~ LR относительно BM =>

=> X симметрично ~~BM~~ Y относительно BM; $BM \perp XY$ =>

=> M - середина XY, M - середина AC.

(5) Да, всегда. Воспользуемся методом математической индукции (Будем рассматривать граф G, в котором школьники - вершины, знакомства - рёбра)

База индукции ($n=1$ - бессмысленно, $n=2$):



Если не знакомы, то $K=2^3$, школьники выбирают по числу 2. ($2^2 \not\vdots\ 2^3$ - условие выполняется)

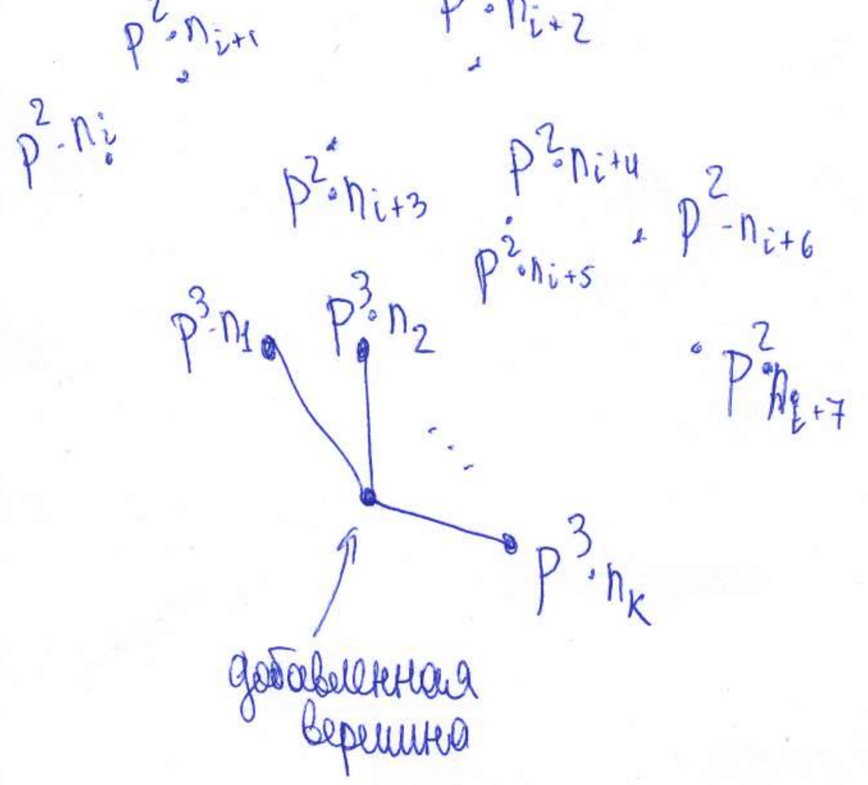
Знакомы: первый выбирает число 2^2, второй: 2; $K=2^3$. ($2^2 \cdot 2 \vdots\ 2^3$ - условие выполняется).

Индуктивный переход:

Пусть для $n=d$ условие выполняется (для любого графа на d вершинах существует такое $k \in \mathbb{N}$, при котором школьники смогут выбрать себе каждый по натуральному числу так, что будет выполняться условие). Докажем, что и для графа на $n=d+1$ вершинах, можно это так же сделать. Для этого из графа на $(d+1)$-ой вершине выкинем любую вершину и все рёбра из неё выходящие. Тогда, по предположению индукции, для оставшегося графа можно выбрать $k \in \mathbb{N}$ и каждой вершине дать натуральное число, так, чтобы условие выполнялось. Тогда добавим нашу ранее удалённую вершину. Заметим, что существует некоторое простое число p, которое не входит в разложение ни одного из чисел в графе и числа K_1 (иначе бы присутствовали все простые числа, а их бесконечно много - противоречие).

Пусть новое K_2 равно $\underbrace{K_1}_{k=K_1 \text{ для графа на } d \text{ вершинах}} \cdot p^4$. А также, каждое число в графе домножим на p^2, а те вершины, с которыми связана наша добавленная - на p^3.

Получим:



Тогда в оставшемся графе, на делимость на K это не повлияло; Если $p^2 \cdot n_r$ и $p^2 \cdot n_q$ связаны, (по выбору для d вершин) то $n_r \cdot n_q \,\vdots\, K_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p^4 \cdot n_r \cdot n_q \,\vdots\, \underbrace{K_1 \cdot p^4}_{K_2}$.

Если $p^2 \cdot n_r$ и $p^2 \cdot n_q$ не связаны, то $p^4 \cdot n_r \cdot n_q \not\vdots\, K_1 \cdot p^4$, т.к. $n_r \cdot n_q \not\vdots\, K_1$.

Если же мы будем брать вершины вида $p^3 \cdot n_f$, то дополнительные множители p не помогли бы делимости на K, поскольку: $(p, K_1) = 1$.

Тогда для нашей добавленной вершины возьмём число $K_1 \cdot p$. Тогда со всеми связанными с ней вершинами она будет образовывать произведение:

$$K_1 \cdot p^4 \cdot \underbrace{m}_{m \in \mathbb{N}}, \text{ которое, очевидно, делится на } K_2 = K_1 \cdot p^4.$$

А если мы возьмём наше добавленное число и любую (вершину) несвязанную с ней, получим произведение:

$$\underbrace{p^3 \cdot K_1}_{(K_1, p) = 1} \cdot \underbrace{q}_{q \in \mathbb{N}} \not\vdots \; K_2 = K_1 \cdot p^4$$

$(q, p) = 1$, т.к. p – простое число, не входящее в разложение ни одного из d уже установленных чисел и K_1

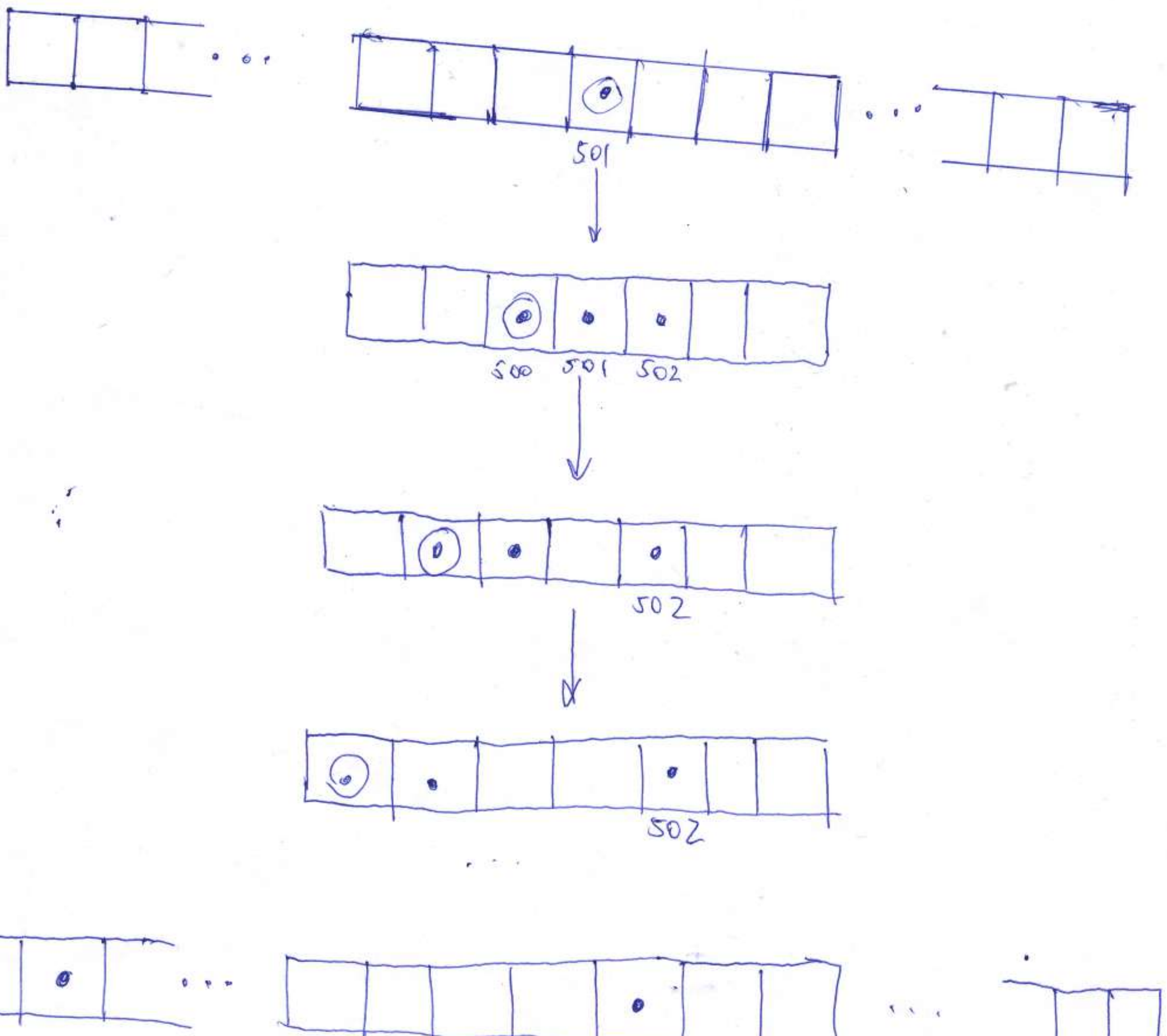
Поскольку, максимальная степень вхождения p в число $(p^3 \cdot K_1 \cdot q)$ равна 3, то произведение не делится на $\underbrace{K_2}_{K_1 \cdot p^4}$.

Именно этого мы и добивались. Получили, что и для графа на $n = d+1$ вершины можно найти такое $K \in \mathbb{N}$.

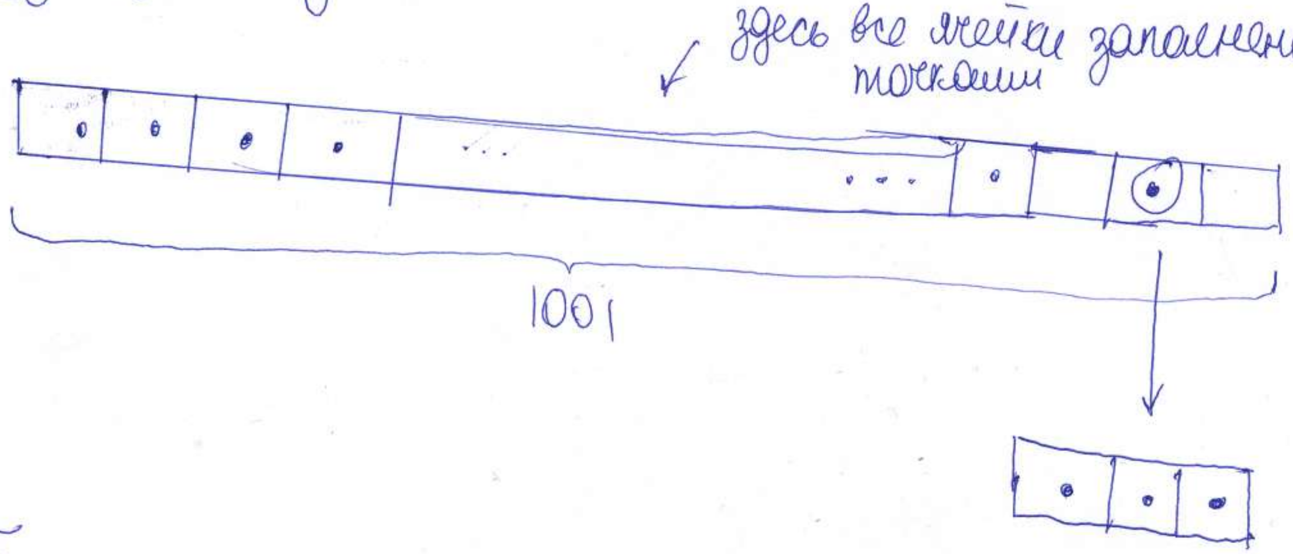
А значит, по теореме математической индукции, всегда найдётся такое натуральное число K, при котором школьники смогут выбрать себе каждый по натуральному числу так, что будет выполнено условие: произведение чисел, выбранных двумя школьниками делится на K тогда и только тогда, когда эти школьники являются друзьями.

(6) Визирь первым ходом может перевернуть только центральную напёрсток (501-ый): будем изображать □ - напёрсток дном вниз; ⊡ - напёрсток дном вверх.

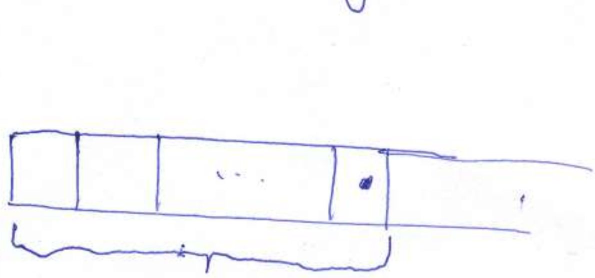
1) Докажем (приведём стратегию) при переворачивании центрального напёрстка: (о - где делается ход)



Если не считать первые две ⊡⊡, то у нас остаётся полоска из 999 клеток с отмеченной клеткой в центре (502-ая в таблице (полоске) $1 \cdot 1001 \Rightarrow$ 500-ая в полоске из 999 клеток, начиная считать с третьей сначала). Будем повторять аналогичные операции, значит, рано или поздно, получим следующую ситуацию:

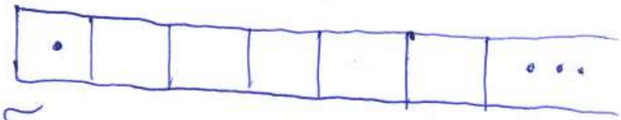


Получим полностью заполненную полоску. Докажем, что, если изначально перевёрнута другая ячейка (другой напёрсток), то выигрышной стратегии не существует (перевернуть все напёрстки никогда не получится).
Будем решать задачу с помощью метода математической индукции. Докажем, что из некоторой точки нельзя получить точек больше, чем $2l$, где l - кол-во ~~точе~~ ячеек от нашей точки до границы полоски включительно:

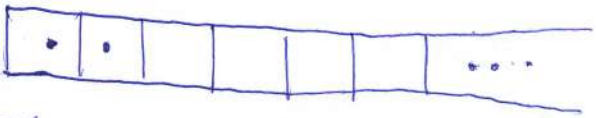


База индукции:
$l = 1$

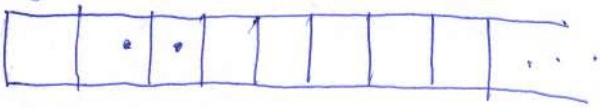
Тогда будем иметь следующую картину:



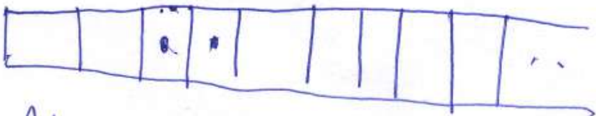
Тогда единственный возможный ход:



Понятно, что делать ход в ячейке 1 бессмысленно делать (мы вернёмся в уже существовавшую ситуацию). Значит, единственный осмысленный ход:

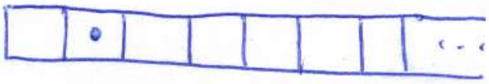


Далее единственный осмысленный ход:

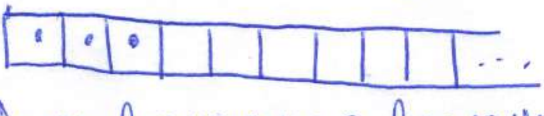


И так далее. Будем гонять эти точки по полоске, ничего лучшего не получим. Значит, максимальное значение количества полученных точек при $l = 1$: 2.

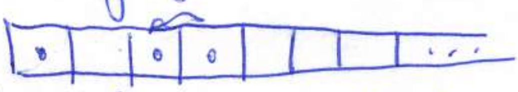
Если $l = 2$, то:



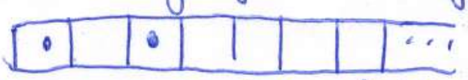
Единственный возможный ход:



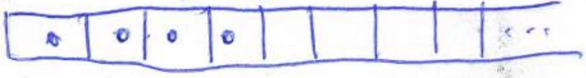
Далее возможны 2 варианта, приводящих нас в новую ситуацию:



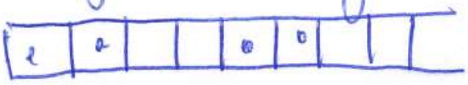
„Одинаково сходящиеся ситуации"



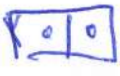
↓ Единственный „новый" ход:

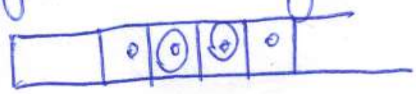


„Гонять" по полоске группу  „бессмысленно => когда-нибудь мы сделаем ход в первой ячейке:

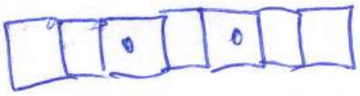


(Такое положение получится и из второго случая)

А далее либо будем гонять группы 2  (что бессмысленно), либо рано или поздно их соединим:



И сделаем ход в одной из выделенных ячеек. Получим:



(в обоих случаях, с точностью до сдвига этих точек)

А тогда у нас есть 2 варианта хода: приводящие к одному и тому же, с точностью до сдвига результату:

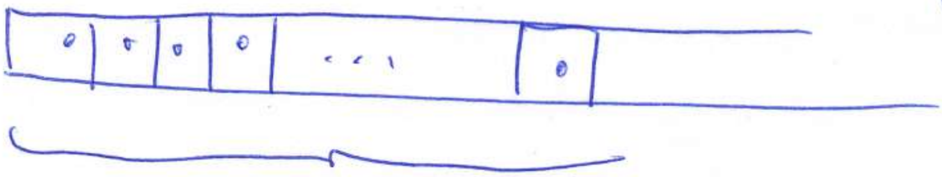
Таким образом мы не сможем кардинально изменить ситуацию $\Rightarrow$ максимальное значение количества точек, которые мы можем получить: 4 (для $l=2$).

Индуктивный переход:

Пусть для $1 \le l \le k$, данное утверждение верно, докажем, что оно верно так же для $l=k+1$.

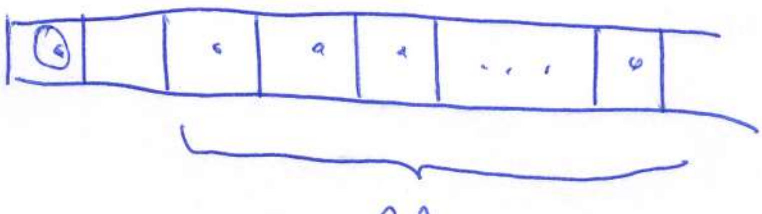
Во-первых нужно сказать, что для любого значения l мы сможем сделать $2l$ точек:

Можно получить полоску $2l-1$ (пользуясь теми рассуждениями, которыми мы заполняли полоску 1001):



$2l-1$

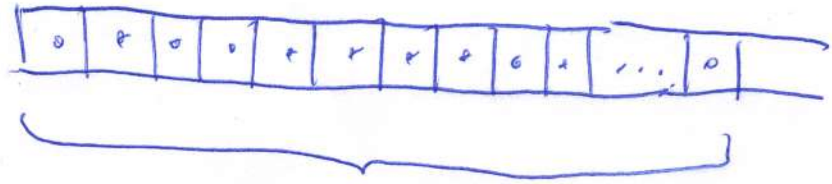
А далее „сдвинем" полоску $2l-2$ вправо (сдвигая группы по 2):



$2l-2$

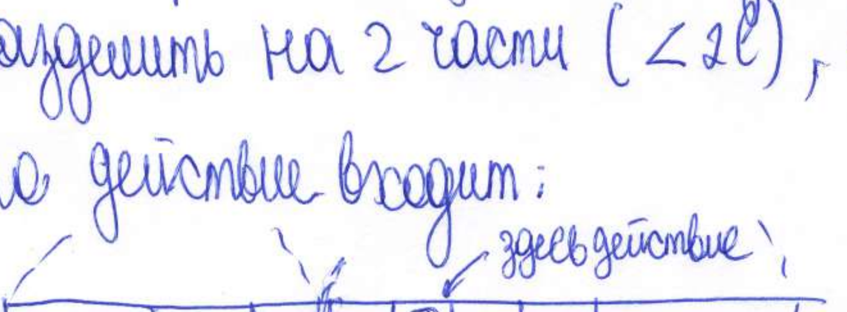
И сделаем ход в выделенной ячейке:

Получим полоску $2l$.



$2l$

Далее при любом действии эту полоску можно разделить на 2 части ($< 2l$), в одну из которых это действие входит:



Причём для каждой из этой части мы, по предположению индукции уже знаем, что получить больше, чем по предположению индукции нельзя (если мы получаем нечётное ряд, то из него всегда можно сделать чётный (хотя бы вернув всё обратно). И значит, получить больше, чем $2(k+1)$ не получится (по теореме о мат. индукции для $\forall \ell \in \mathbb{N}$, утверждение верно). Значит, чтобы заполнить ряд 1001, нужно чтобы $2\ell \geqslant 1001$ (ℓ - та самая величина - расстояние (минимальное) до границы) $\Rightarrow \ell \geqslant 500{,}5$. Но $\ell \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell \geqslant 501$, а значит, единственный возможный вариант - наша центральная точка.

Ответ: 501-ый (центральный) напёрсток.

(7) $a, b, c \geq 0 \mid a^2+2b^2+3c^2=1$

(?) $2a^3+3b^3+4c^3 \longrightarrow \min$

Для начала, пусть $a^2+2b^2=x$ $(x=const)$

Найдём, в каком случае достигается минимум выражения $2a^3+3b^3$ (Для простоты будем считать, что $x=1$ - это никак не повлияет на то, когда достигается минимум (при каком соотношении переменных a и b).

Тогда $2b^2 = x-a^2 = 1-a^2$

$$b^2 = \frac{1-a^2}{2} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{1-a^2}{2}} \quad (b \geq 0 \text{ по условию}).$$

Тогда $2a^3+3b^3 = 2a^3+3\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}^{\,3}$. Найдём производную функции: $f(a) = 2a^3+3\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}^{\,3}$ (продифференцируем её).

$$f'(a) = \left(2\cdot a^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(1-a^2)\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \left(2\cdot a^3\right)' + \left(3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(1-a^2)\right)^{\frac{3}{2}}\right)' =$$

$$= 6\cdot a^2 - \frac{9}{2}\cdot a\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(1-a^2)}$$

Найдём экстремумы функции: $(f'(a)=0)$

$$6a^2 - \frac{9}{2}a\sqrt{\frac{1-a^2}{2}} = 0$$

$6a^2 = \frac{9}{2}a\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}$ (обе части выражения ≥ 0

($a^2 \leq 1$, иначе $\underbrace{a^2}_{>1} + \underbrace{2b^2+3c^2}_{\geq 0} > 1$,

что невозможно)

Значит:

$36a^4 = \frac{81}{4}a^2\left(\frac{1-a^2}{2}\right) \Rightarrow 36a^4 - \frac{81}{4}a^2\left(\frac{1-a^2}{2}\right) = 0$

$4a^4 - \frac{9}{4}a^2\left(\frac{1-a^2}{2}\right) = 0$

Пусть $a^2 = t$,

$16a^4 - 9a^2\left(\frac{1-a^2}{2}\right) = 0$

получим:

$16t^2 - 9t\left(\frac{1-t}{2}\right) = 0$

По виду уравнение является квадратным $\Rightarrow$ оно имеет ≤ 2 корней. Один из них: $t = 0 \Rightarrow a = 0$.

$32t^2 - 9t(1-t) = 0$

$t(32t - 9 + 9t) = 0$

$t(41t - 9) = 0$

$t = 0$ $\quad 41t - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{41}$.

В этом случае $a^2 = \frac{9}{41}$, тогда:

$\frac{9}{41} + 2b^2 = 1 \Rightarrow 2b^2 = \frac{32}{41} \Rightarrow b^2 = \frac{16}{41} \Rightarrow b = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Значит, поскольку у функции $f(a)$ 2 экстремума (при $a=0$, и

при $a = \frac{3}{\sqrt{41}}$ $(a \geq 0)$. В точке при $a = 0$ функция
если $a < 0$, то функция монотонно убывает вниз (до $a = -1$).

$f(a) = 2a^3 + 3\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}^{\,3}$ имеет значение:

$$f(0) = 3\sqrt{\frac{1}{2}}^{\,3} = 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

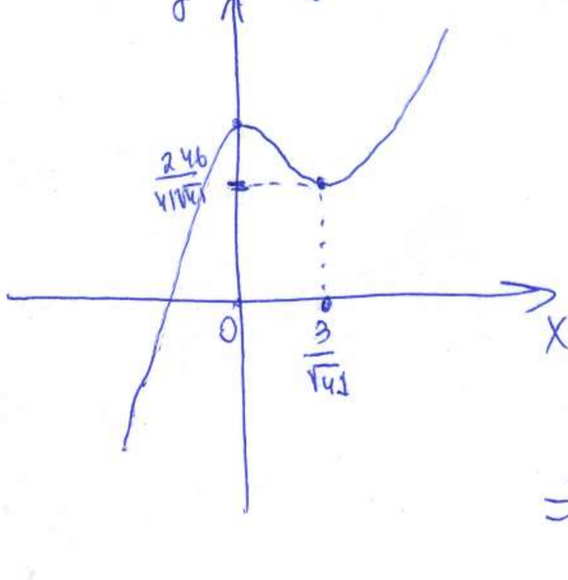
В точке $f\left(\frac{3}{\sqrt{41}}\right) = 2 \cdot \frac{27}{41\sqrt{41}} + 3\sqrt{\frac{1-\frac{9}{41}}{2}}^{\,3} =$

$$= \frac{54}{41\sqrt{41}} + 3\sqrt{\frac{16}{41}}^{\,3} = \frac{54}{41\sqrt{41}} + 3\frac{4^3}{\sqrt{41}^3} = \frac{54 + 3 \cdot 64}{41\sqrt{41}} =$$

$$= \frac{246}{41\sqrt{41}} = \frac{41 \cdot 6}{41\sqrt{41}}$$

Но $\sqrt{41} > \underbrace{\sqrt{36}}_{6} \Rightarrow \frac{41 \cdot 6}{41\sqrt{41}} < 1$; а $\sqrt{2} < 1{,}5 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{2}} > \frac{3}{\frac{3}{1}}$.

Значит, в точке $f(0)$ находится локальный максимум, в точке $f\left(\frac{3}{\sqrt{41}}\right)$ - локальный минимум. Значит, график функции выглядит следующим образом:



Поскольку нам нужен минимум в I четверти, то он достигается при $a = \frac{3}{\sqrt{41}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{4}{\sqrt{41}}$ (в уравнении $a^2 + 2b^2 = 1$)

Получим, что $\frac{a}{b} = \frac{3}{\sqrt{41}} : \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{3}{4}$. (Если мы хотим получить минимальное значение выражения $2a^3 + 3b^3$).

А теперь зафиксируем значения:

$a = 3n$; $b = 4n$ $(n \geq 0)$

~~А~~ Получим: $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$

$9n^2 + 2 \cdot 16n^2 + 3c^2 = 1$

$9n^2 + 32n^2 + 3c^2 = 1$

$\underbrace{41n^2 + 3c^2 = 1}$.

$2a^3 + 3b^3 + 4c^3 = 2 \cdot 27n^3 + 3 \cdot 64n^3 + 4c^3 = 54n^3 + 192n^3 + 4c^3 =$
$= 246n^3 + 4c^3$.

Аналогично, как в первом рассуждении будем находить минимум значения $246n^3 + 4c^3$.

$41n^2 + 3c^2 = 1 \Rightarrow 3c^2 = 1 - 41n^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1-41n^2}{3} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1-41n^2}{3}}$
$(c \geq 0)$

Значит: $f(n) = 246n^3 + 4 \cdot \sqrt{\frac{1-41n^2}{3}}^{\,3}$

$f'(n) = \left(246 \cdot n^3 + 4\left(\frac{1-41n^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \left(\left(4 \cdot \frac{1-41n^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)' + (246 \cdot n^3)' =$
$= -164n\sqrt{\frac{1-41n^2}{3}} + 738n^2 = 738n^2 - 164n\sqrt{\frac{1-41n^2}{3}}$.

Найдём экстремумы $f(n)$:

$$738n^2 - 164n\sqrt{\frac{1-41n^2}{3}} = 0$$

$$738n^2 = 164n\sqrt{\frac{1-41n^2}{3}}$$ (обе части ≥ 0, поэтому возведём их в квадрат)

$$738^2 n^4 = 164^2 n^2 \left(\frac{1-41n^2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{738}{164}\right)^2 n^4 = n^2\left(\frac{1-41n^2}{3}\right)$$

$$\frac{81}{4}n^4 = \frac{n^2}{3} - \frac{41n^4}{3} \quad \Big| \times 3$$

$$\frac{243}{4}n^4 = n^2 - 41n^4 \Rightarrow 41n^4 + \frac{243}{4}n^4 - n^2 = 0$$

$$\frac{164+243}{4}n^4 - n^2 = 0$$

$$\frac{407}{4}n^4 - n^2 = 0$$

$$n^2\left(\frac{407}{4}n^2 - 1\right) = 0$$

$$n^2 = 0 \qquad \frac{407}{4}n^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{407n^2}{4} = 1 \Rightarrow n^2 = \frac{4}{407}$$

Поскольку при $n < 0$ функция монотонно убывает, то экстремум достигается при $n \geq 0$. Получим:

$n = \frac{2}{\sqrt{407}}$. Найдём значения функции в точках 0 и $\frac{2}{\sqrt{407}}$:

$$f(0) = 4\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}^{\,3} = 4\cdot\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

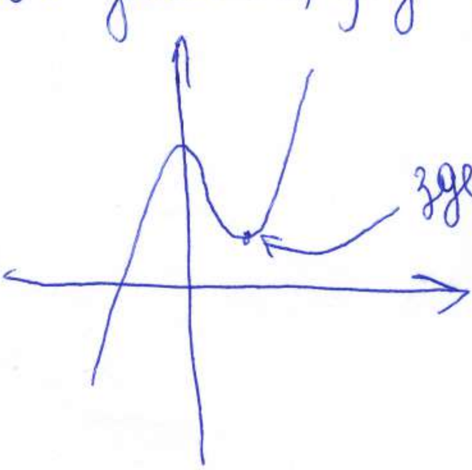
$$f\left(\frac{2}{\sqrt{407}}\right) = 246\cdot\frac{8}{407\sqrt{407}} + 4\cdot\sqrt{\frac{1-41\cdot\frac{4}{407}}{3}}^{\,3} =$$

$$= \frac{246\cdot 8}{407\sqrt{407}} + 4\cdot\sqrt{\frac{\frac{243}{407}}{3}}^{\,3} = \frac{246\cdot 8}{407\sqrt{407}} + 4\cdot\frac{9^3}{407\sqrt{407}} =$$

$$= \frac{1968+2916}{407\sqrt{407}} = \frac{4884}{407\sqrt{407}} = \frac{12}{\sqrt{407}}.$$

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} > \frac{12}{\sqrt{407}}, \text{ т.к. } \frac{16}{27} > \frac{144}{407} \Leftrightarrow \underset{\underset{\frac{9}{243}}{\parallel}}{\frac{1}{27}} > \frac{9}{407}$$

А значит, функция будет выглядеть следующим образом:



здесь минимум (при $n = \frac{2}{\sqrt{407}}$).
(в I четверти, т.к. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$).

Как видно, минимум выражения ~~дости~~ $\cancel{a^2+2b}$
$2a^3+3b^3+4c^3$ при $a, b, c \geq 0$ и $a^2+2b^2+3c^2=1$
равен $\frac{12}{\sqrt{407}}$.

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{407}}$.