№1.

Если ответ „Нет" когда-то прозвучал, то должен был остаться хотя бы один человек. Покажем как этого добиться, если сейчас у нас 2K людей по индукции. База $K=1$. Поставим рыцаря и лжеца. Тогда они оба ответят „Да", после этого уберём лжеца, и оставшийся рыцарь ответит „Нет". Заметим, что в данном примере рыцари и лжецы чередуются. Пусть мы умеем решать задачу когда за столом чередуясь сидят ~~2K людей~~ 2K людей для K от 1 до n. Тогда в случае когда за столом чередуясь будут сидеть $2(n+1)$ человек мы выберем одного лжеца. Его два соседа рыцари. Поэтому если мы его уберём, то соседи всех людей кроме этих двух рыцарей не поменяются, как и их ответы. А раз $n+1 \geq 2$, то для этих двух рыцарей ~~сх~~ один из их соседей останется лжецам, и они по прежнему ответят „Да" (заметим что в изначальной рассадке все тоже говорили „Да" так как лжец сидел между двумя рыцарями, а рыцари — между двумя лжецами). После этого уберём рыцаря, который сидел по часовой стрелке от выбранного лжеца. Тогда у нас окажется последовательно за столом чередуясь будут сидеть рыцари и лжецы, всего 2n, каждый из которых будет говорить „Да", а для такой ситуации мы ~~умеем~~ умеем решать задачу. Раз в условии сказано, что за столом сидят 99 человек, то мы посадим одного рыцаря, а от него по часовой стрелке чередуя рыцарей и лжецов: Р Л Р Л

Тогда каждый лжец будет сидеть между двумя рыцарями и ответит „Да", а все рыцари кроме обведённого и его соседа по часовой стрелке — между двумя лжецами. ~~Тогда~~ А у обведённого и его соседа по часовой стрелке также один из соседей будет лжец. Тогда все ответят „Да". После этого мы уберём обведённого рыцаря и за столом чередуясь будут сидеть $2\cdot 49$ человек. Значит ~~было~~ мы сможем действовать так, чтобы в конце остался один человек и лишь тогда впервые прозвучит ответ „Нет".

№2.

Раз $x \in \mathbb{Q}$, то пусть $x = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $y = \frac{m}{n} \cdot \frac{(3n-m)^2}{n^2} = \frac{m(3n-m)^2}{n^3}$. Тогда если условие выполняется, то

$$\frac{m}{n} = \frac{m(3n-m)^2}{n^3} \cdot \frac{(3n^3 - m(3n-m)^2)^2}{n^6} = \frac{m(3n-m)^2(3n^3-m(3n-m)^2)^2}{n^9}.$$

Если $m \neq 0$, то $n^8 = (3n-m)^2(3n^3 - m(3n-m)^2)^2$.

Тогда $n^8 \vdots (3n-m)^2$. Пусть $(n, 3n-m) = x$. Тогда

$n \vdots x \Rightarrow 3n \vdots x$, $3n-m \vdots x \Rightarrow m \vdots x$, но $(n,m)=1$ (мы выберем n и m таким образом), тогда $1 \le x \le 1 \Rightarrow x=1$. Тогда $(n, 3n-m) = 1 \Rightarrow (n^8, (3n-m)^2) = 1$, а раз $n^8 \vdots (3n-m)^2$, то $(3n-m)^2 = 1$ или -1, но квадрат не может быть отрицательным. Тогда

$$(3n-m)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3n-m=1 \\ 3n-m=-1 \end{array}\right.$$

Раз $(3n-m)^2=1$, то $n^8 = (3n^3 - m\cancel{(3n-m)^2})^2$. Пусть $(n, 3n^3 - m\cancel{(3n-m)^2}) = x$, тогда $n \vdots x \Rightarrow 3n^3 \vdots x$, $3n^3 - m\cancel{(3n-m)^2} \vdots x \Rightarrow m\cancel{(3n-m)^2} \vdots x$. Если $(m,x) = a$, то $n \vdots x \vdots a$, $m \vdots a \Rightarrow 1 \le a \le 1 \Rightarrow a = 1$. Тогда $(m,x)=1 \Rightarrow \cancel{(3n-m)^2} \vdots x$. Пусть

~~$(3n-m, x) = y$. Тогда $n \vdots x \vdots y \Rightarrow 3n \vdots y$, $3n-m \vdots y \Rightarrow m \vdots y \Rightarrow 1 \le y \le 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (3n-m, x) = 1 \Rightarrow ((3n-m)^2, x) = 1$, $(3n-m)^2 \vdots x \Rightarrow x = 1$ или -1. Аналогично $x=-1$ не подходит так как это НОД двух чисел. Тогда $(n, 3n^3 - m(3n-m)^2) = 1 \Rightarrow (n^8$~~

Значит $x = 1$ или -1. Но $x=-1$ не подходит, $m \vdots x$.

так как это НОД двух чисел. Тогда $x=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n, 3n^3-m)=1 \Rightarrow (n^3, (3n^3-m)^2)=1,\ n^3 \vdots (3n^3-$

$-m)^2 \Rightarrow (3n^3-m)^2 = 1$ или -1. Аналогично

$(3n^3-m)^2 \geq 0 \Rightarrow (3n^3-m)^2 = 1 \Rightarrow \cancel{3n^3 = m}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3n^3-m=1 \\ 3n^3-m=-1 \end{array}\right.$$

То есть должно выполняться следующее

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3n-m=1 \\ 3n-m=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3n^3-m=1 \\ 3n^3-m=-1 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ m=0 \end{array}\right.$$

Если $m=0$, то $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x+y=0$.

Если $m\neq 0$, то разберём случаи:

1. $\left\{\begin{array}{l} 3n-m=1 \\ 3n^3-m=1 \end{array}\right. \Rightarrow 3n^3=3n \Rightarrow n^2=1 \Rightarrow n=1$, так

как $n \in \mathbb{N}$. Тогда $m=2 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=$

$= 2(3-2)^2 = 2 \Rightarrow x+y=4.$

2. $\left\{\begin{array}{l} 3n-m=1 \\ 3n^3-m=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \cancel{3n}\; 3n-3n^3=2$, но такого не бывает, так как левая часть кратна 3, а правая — нет.

3. $\left\{\begin{array}{l} 3n-m=-1 \\ 3n^3-m=1 \end{array}\right. \Rightarrow 3n^3-3n=2$. Аналогично сл. 2 такого не бывает.

4. $\left\{\begin{array}{l} 3n-m=-1 \\ 3n^3-m=-1 \end{array}\right. \Rightarrow 3n^3=3n^2 \Rightarrow n=1 \Rightarrow m=$
$=4 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=4\cdot(3-x)^2=$
$=4 \Rightarrow x+y=8$.

Ответ: $x+y=\{0,4,8\}$.

№7.

Возьмём $n=1 \vdots 2$, $m=1 \vdots 2$. Тогда $3^n-1=2$, $2^m-1=1$. $2 \vdots 1$. Значит $n=1$, $m=1$ подходят.

№4.

1	2	3	4	5	6	.	.	.
11	12	13	14	.	.	.		

~~Заметим, что к~~

Заметим, что нам неважно как ~~именно~~ именно расставлены числа в первой табличке, ведь единственное условие для заполнения второй таблички связано с тем, куда переместились эти числа. Тогда заметим, что число могло переехать в соседнюю клетку столбца или остаться в своей строке (переездом назовём смену числом строки). Пусть с верхней строки на нижнюю переехало k чисел. Тогда места, на которых они будут стоять определяются однозначно. Также во второй строке по прежнему осталось 20 мест, а значит на первую строчку должны переехать также k чисел. Тогда оставшиеся $20-k$ чисел мы должны расставить по свободным $20-k$ позициям в пределах второй строки. Делать это можно $(20-k)!$ способами. Аналогично для первой строки. Тогда общим ответом для k будет $C_{20}^{k\,2}\cdot(20-k)!^2=\left(\frac{20!}{k!(20-k)!}\right)^2\cdot(20-k)!^2=\left(\frac{20!}{k!}\right)^2$, ведь у нас есть C_{20}^{k} способов выбрать столбцы для первой строки числа из которых переедут и столько же для второй. Заметим, что таким образом мы посчитали каждый случай ровно один раз ведь для всех возможных k мы рассмотрели все возможные переезды для первой и второй строк, а для каждого из них рассмотрели все возможные расположения оставшихся чисел, а варианты отличающиеся хотя бы по одному из параметров (переехавшие с первой строки, переехавшие со второй строки, расстановка ~~оставши~~ оставшихся в первой строке, расстановка оставшихся во второй строке) будут отличаться. Также каждый вариант будет подходить, так как числа перемещаются не более одного раза по столбцу либо строке и никакие два числа не встанут на одну позицию. Тогда ответ равен $\sum_{k=0}^{20}\left(\frac{20!}{k!}\right)^2 = 20!^2\left(\frac{1}{k!^2}\right)$.