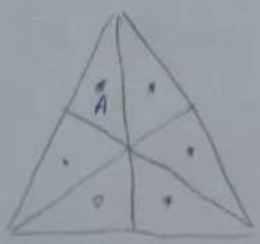
Задача 5

Рассмотрим развертку треугольников

Пусть начальный Δ такой:

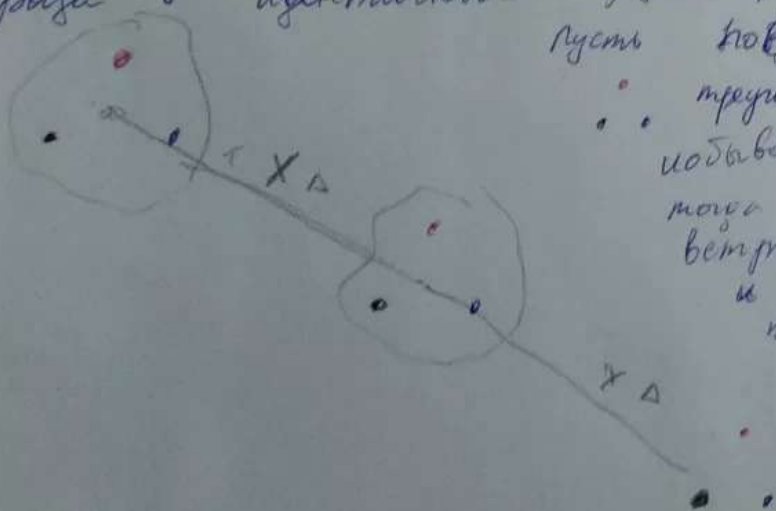
тогда всего различных Δ шесть:

По развертке наш шарик катится по прямой.



В Δ есть 6 точек, симметричных данной при отражении. (То есть точка A может перейти в другие в отраженных Δ) Если мы закрепим вершины, то можем всегда отслеживать начальное положение и переходное.

По условию, в некоторой точке стола шар побывал семь раз. Значит он побывал два раза в идентичных двух треугольниках.



Пусть повторяющимся будет треугольник. Там шар побывал два раза, но тогда в седьмой раз он вернулся на конец цикла и через такое же кол-во переходов попадет еще раз (8-й) в этот же Δ.

Задача 4

$3^n - 1 \vdots 2^m - 1$, $m > 1$, m, n - нечетные

Если это вып, то

$3^n - 2^m \vdots 2^m - 1$

$3^n - 1 = k(2^m - 1)$

1) n - нч

$3^n \underset{4}{\equiv} -1$

$(-1)^n \underset{4}{\equiv} -1$

Л.ч $\equiv -2 \mod 4$

П.ч $\equiv -1 \cdot k$ $(2^m \underset{4}{\equiv} 0)$

$k \equiv 2 \mod 4$

2) m - нч

$2 \equiv -1 \mod 3$

$2^m \equiv -1 \mod 3$

П.ч. $\underset{3}{\equiv} -2k \underset{3}{\equiv} k$

Л.ч $\equiv 2 \mod 3$

$k \equiv 2 \mod 3$

$k \equiv 2 \mod 12$

$k = 12p + 2$

$3^n - 1 = (12p + 2)(2^m - 1)$

$3^n - 1 = 12 \cdot p \cdot 2^m + 2 \cdot 2^m - 12p - 2$

$3^n + 1 = 12 \cdot p \cdot 2^m + 2^{m+1} - 12p$

$3^n + 1 = 4(3p \cdot 2^m + 2^{m-1} - 3p)$

Тогда $m, n \not\exists$

Задача 1

$f: N \to N$

$f(f(n)) = n^2$

$f(f(0)) = 0$

$f(f(1)) = 1$

$f(f(f(0))) = f(0)$

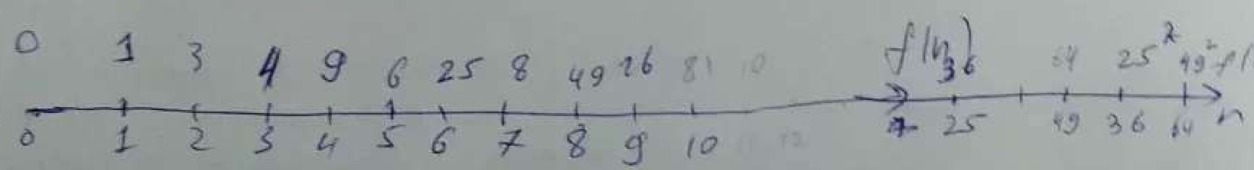
$= f(f(\underbrace{f(n)}_{\varphi})) = f(n^2)$

$f(n) = \varphi$

$f(n^2) = \varphi^2$, то есть у нашей ф-и есть такое свой-во

$f(n^2) = (f(n))^2$

Т.к. наша ф-я определена на натуральных числах, ее можно рассматривать как последова-сь



Пусть $f(2)=3$, тогда значение в точке 3 можно определить как $f(f(2)) = 4$ что удобно

$f(4) = f(f(3)) = 9$

① По квадратам у нас автозаполнение.

Пусть $f(5) = 6$

$f(6) = f(f(5)) = 5^2 = 25$

$f(7) = 8$

$f(8) = f(f(7)) = 49$

$f(9) = \cancel{\ldots} = f(f(4)) = 4^2 = 16$

$f(25) = f(f(6)) = 36$

$f(36) = f(f(25)) = 25^2$

$f(64) = f(f(49)) = 49^2$

Функция:

$f(0) = 0$

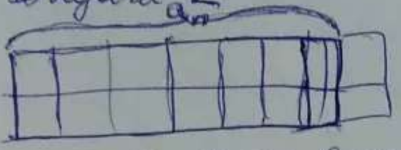
$f(1) = 1$

для $n > 1$

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & n \text{ – нечетное, не квадрат} \\ (n-1)^2, & n \text{ – четное, не квадрат} \\ (\sqrt{n}+1)^2, & n \text{ – нечетное, квадрат} \\ (\sqrt{n}-1)^4, & n \text{ – четн, квадрат, } n \geq 4 \end{cases}$$

$f(4) = 9$.

Задача 2

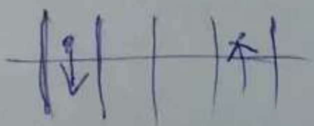


a_n – число вариантов

1) $(n!)^2$ – если мы двигаем цифры только в своей строке

$\cancel{a_{n+1} = a_n + a'} = b_n$ $\quad a_n = a_{n-1} + a' = b_n$

$b_n = (n!)^2 +$



2) Теперь будем рассматривать уход 1, 2, ... n чисел в другую строку

3) Если ограничатся одной строкой, то для ное картинка выглядит так: ↓↓ ↑↑ сколько чисел ушло, столько чисел пришло и не важно какие.

4) Если ушла одна цифра ↓↑

C_n^2 – выбор двух – из которого уйдет – из которого придет.

$C_n^2 \cdot 2$ ↓↑/↓↑ и перестановки $(n-1)!$ в двух строках.

$C_n^2 \cdot 2 \cdot (n-1)!^2$

5) Если ↓↓↑↑

$C_n^4 \frac{4!}{2! \cdot 2!}$ → перестановки стрелок

$\cdot (n-2)!$

$b_n = (n!)^2 + C_n^2 2 (n-1)!^2 + C_n^4 \frac{4!}{2! 2!} (n-2)! + \dots \quad C_n^{2k} C_{2k}^{k} (n-k)!$

Отв: $\sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k} \cdot C_{2k}^{k} (n-1)!$

Задача 7

$a \# c = b \# c$

$\exists \tilde{c}$, т.ч. $c \# \tilde{c} = \varphi$

$a \# c = b \# c \quad | \# \tilde{c}$

$a \# (c \# \tilde{c}) = b \# (c \# \tilde{c})$

$a \# \varphi = b \# \varphi$

Если для a, b $\exists c$, т.ч: $a \# c = b \# c$, то $\forall \varphi$ $a \# \varphi = b \# \varphi$

То есть:

$\forall c \quad a \# c = b \# c$

$a \# \lambda = a$

$a \# \lambda = b \# \lambda = a$

$b \# \lambda = a$