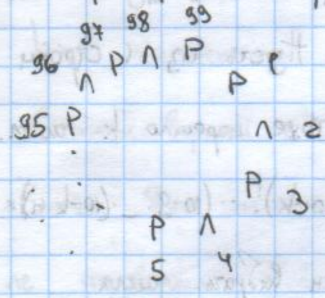
Задача №1

Ответ „нет" прозвучал => наименьшее число людей не меньше 1. Пример, в котором остается один человек, говорящий „нет":



Если люди уходят в порядке 1, 2, ..., 98 то ответы „да" будут звучать до того момента, пока не останется последний рыцарь, рядом с которым не окажется лжеца

Ответ: 1 человек.

Задача №2

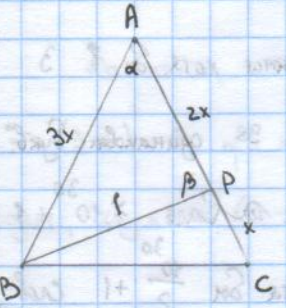
Заметим, что при $x=y$ система верна. $x = x(3z-x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3-x)^2 = 1$ при $x \neq 0$. При $x=0$ обе части равны $0 \Rightarrow x=y=0$ подходит, $x+y=0$. $(3-x)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=1 \\ 3-x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

$x=y=2 \Rightarrow x+y=4$, $x=y=4 \Rightarrow x+y=8$

Ответ: 0, 4, 8.

Задача №3



Дано:

$AB = AC$

$2PC = AP$

$BP = 1$

Найти $\max S_{\Delta ABC}$

Решение:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 3x \cdot \sin\alpha$. По теореме синусов $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3x}{\sin\beta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x \sin\alpha = \sin\beta$. Максимальное значение $3x\sin\alpha$ достигается при максимальном значении $\sin\beta$, которое равно 1 при $\beta = 90^\circ$. Но тогда по т. Пифагора $1^2 + (2x)^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow 1 = 5x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. И т.к. BP высота $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Задача №4

Заметим, что если какое-то число меняет строку, то еще одно число должно поменять строку, причем из другой строки, т.к. кол-во чисел в каждой строке фиксировано. Выбрать k чисел из 10 которые поменяют строку C_{10}^{k} способов, ~~в~~ оставшиеся в строке числа можно переставлять $(10-k)!$ способами. Для 2 строки кол-ва способов те же => получаем $\left(C_{10}^{k}\cdot(10-k)!\right)^2 = \left(\frac{10!}{k!\,(10-k)!}\cdot(10-k)!\right)^2 = \left(\frac{10!}{k!}\right)^2$. k может принимать значения от 0 до 10 => ответ $\sum\limits_{k=0}^{10}\left(\frac{10!}{k!}\right)^2$

Ответ: $\sum\limits_{k=1}^{10}\left(\frac{10!}{k!}\right)^2$

Задача №5

Пусть президенты - вершины, а рукопожатия - ребра. Предположим вершин степени 1 нет. Рассмотрим вершину с максимальной степенью k. $k \geq 2$ т.к. некоторые пожали друг другу руки и вершин степени 1 нет. Степени вершин с которыми соединена рассматриваемая вершина может быть от 2 до k - k-1 вариантов => по принципу Дирихле из вершин с которыми соединена рассматриваемая найдутся 2 одинаковой степени - противоречие условию => найдется вершина степени 1, ч.т.д.

Задача №6

Любые ~~слова~~ два слова одинаковой длины отличаются хотя бы в 3 местах $\Leftrightarrow$ у любых двух слов одинаковой длины нет 98 одинаковых букв. Предположим различных слов длины 100 на этой планете ~~не более~~ $\geq 10^{30}+1$. Тогда ~~слов, у которых~~ по п. Дирихле есть хотя бы $\frac{10^{30}}{2}+1$ слов, которые начинаются на одну и ту же букву. Аналогично слов, которые начинаются на одинаковую последовательность из 98 букв хотя бы $\left[\frac{10^{30}}{2^{98}}+1\right]$.

Сравним 10^{30} и 2^{98}: $10^{30} \vee 2^{98} \Leftrightarrow 5^{30} \vee 2^{68} \Leftrightarrow 4\cdot 5^{30} \vee 2^{70} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\cdot 125^{10} \vee 128^{10} \Leftrightarrow 4 \vee \left(\frac{128}{125}\right)^{10} \Leftrightarrow 2 \vee \left(\frac{128}{125}\right)^{5}$

$\frac{128}{125} = 1\frac{3}{125} < 1\frac{1}{40} = \frac{41}{40} < \frac{10}{9}$. $10^5 = 100000$. $9^5 = 9^2\cdot 9^3 = 81\cdot 729 =$
$= 59049$. $\frac{59049}{100000} < 1 \Rightarrow \left(\frac{128}{125}\right)^5 < \left(\frac{10}{9}\right)^5 < 2 \Rightarrow 10^{30} > 2^{98} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ слов, которые начинаются на одинаковую последовательность из 98 букв хотя бы 2 – противоречие $\Rightarrow$ слов длины 100 не более, чем 10^{30}, ч.т.д.