Задача 1.

Ответ: существует.

Приведу пример такой функции. Пусть $f(1)=1$. Тогда для $n=1$ выполнено $f(f(n))=n^2$. Пусть $f(2)=3$, $f(3)=2^2$, $f(2^2)=3^2$, $f(3^2)=2^4$ и т.д. То есть $2\to 3\to 2^2\to 3^2\to 2^4\to 3^4\to 2^8\to 3^8\to\ldots$ (обозначение $a\to b$ означает, что $f(a)=b$). Мы сказали, чему равно $f(1), f(2), f(3), f(4)$. Следующее пока что не использованное число — 5. Пусть $5\to 6\to 5^2\to 6^2\to 5^4\to 6^4\to 5^8\to 6^8\to\ldots$

Теперь равенство $f(f(n))=n^2$ выполнено для чисел $n=1,2,3,4,5,6$. Продолжим этот процесс, на каждом следующем шаге рассматривая не использованное ранее число a. (Мы берём первое пока что не использованное число a и второе пока что не использованное число b и строим цепочку $a\to b\to a^2\to b^2\to a^4\to b^4\to a^8\to b^8\to\ldots$). Тогда единственное, что может нам помешать построить очередную цепочку — если число в ней совпадёт с числом из ранее построенной цепочки. Докажем, что такого не может быть. Пусть

$$a\to\ldots\to a^{(2^k)}\to\ldots$$
$$\qquad\qquad\ \ \|$$
$$b\to\ldots\to b^{(2^l)}\to\ldots$$

$a^{(2^k)}=b^{(2^l)}$; будем считать, что $b>a$, тогда $k>l$.

Пусть $a=(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots)^{(2^k)}$; $b=(p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots)^{(2^l)}$ — разложения на простые множители чисел a и b.

Тогда $\alpha_i\cdot 2^k=\beta_i\cdot 2^l$ (для любого i) $\Rightarrow \beta_i=\alpha_i\cdot 2^{k-l}\Rightarrow b=a^{(2^{k-l})}$.

Но это значит, что $b=a^{(2^{k-l})}$ встречалось в цепочке

$$a\to\ldots\to a^{(2^{k-l})}\to\ldots$$

Но тогда бы мы его не рассматривали как пока не использованное число и не строили бы начиная (1 или 2 место в цепочке) с него цепочку — противоречие.

Задача 2.

Пусть 0 чисел поменяли строку (с первой на вторую или со второй на первую). Тогда 10 чисел первой строки просто переписали в каком-то порядке ($10!$ способов), и числа второй строки переписали в каком-то порядке ($10!$ способов). Получаем $10! \cdot 10!$ возможных расстановок.

Если 1 число поменяло строку (например, стояло в первой строке, а теперь стоит во второй), то во второй строке будет стоять 11 чисел — противоречие. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что поменять строку могли 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 чисел (только четное число). Пусть 2 числа поменяли строку. Тогда одно число перешло с 1 строки на 2 (10 способов выбрать это число) и одно число перешло с 2 строки на 1 (10 способов). Заметим, что если число поменяло строку, то оно сохранило столбец. Поэтому одно место в верхней и одно место в нижней строке зафиксировано и можно переставить 9 чисел в первой строке ($9!$ способов) и 9 чисел во второй строке ($9!$ способов). Итого в этом случае получаем $10 \cdot 10 \cdot 9! \cdot 9! = 10! \cdot 10!$ способов.

Пусть 4 числа поменяли строку. Тогда 2 числа перешли с 1 стр. на 2 (C_{10}^2 вариантов) и 2 числа перешли с 2 стр. на 1 (C_{10}^2 вариантов). Осталось переставить 8 чисел 1 строки ($8!$ способов) и 8 чисел 2 строки ($8!$ способов). В этом случае получаем $C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot 8! \cdot 8! = \left(\frac{10 \cdot 9}{2!} \cdot 8!\right)^2 = \left(\frac{10!}{2!}\right)^2$.

Если 6 чисел поменяли строку то, рассуждая аналогично, получим формулу $\left(\frac{10!}{3!}\right)^2$ и т.д. Поэтому ответ можно записать как сумму $(10!)^2 + (10!)^2 + \left(\frac{10!}{2!}\right)^2 + \left(\frac{10!}{3!}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{10!}{10!}\right)^2$.

(Если все 20 чисел поменяли строку, то возможна всего $1 = \left(\frac{10!}{10!}\right)^2$ расстановка)

Ответ: $(10!)^2 + (10!)^2 + \left(\frac{10!}{2!}\right)^2 + \left(\frac{10!}{3!}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{10!}{10!}\right)^2$.

Задача 4.

Ответ: не существуют.

Предположим противное: $3^n \equiv 1 \pmod{2^m-1}$. Пусть $n=2k+1$.

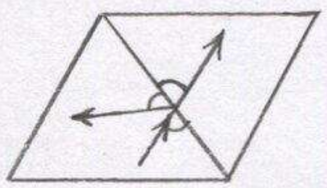
По св-вам символа Якоби: $1=\left(\frac{1}{2^m-1}\right)=\left(\frac{3^n}{2^m-1}\right)=\left(\frac{3^{2k}}{2^m-1}\right)\left(\frac{3}{2^m-1}\right)=\left(\frac{3}{2^m-1}\right)$

Итак, $1=\left(\frac{3}{2^m-1}\right)$. Домножим обе части на $\left(\frac{2^m-1}{3}\right)$ и применим квадратичный закон взаимности:

$$\left(\frac{2^m-1}{3}\right)=\left(\frac{3}{2^m-1}\right)\left(\frac{2^m-1}{3}\right)=(-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{2^m-2}{2}}=(-1)^{2^{m-1}-1}=-1$$

С другой стороны, из нечётности m следует: $2^m-1\underset{3}{\equiv}(-1)^m-1\underset{3}{\equiv}-1-1\underset{3}{\equiv}1\underset{3}{\equiv}1^2$. То есть 2^m-1 — квадратичный вычет по модулю $3 \Rightarrow \left(\frac{2^m-1}{3}\right)=1$ — противоречие.

Задача 5.



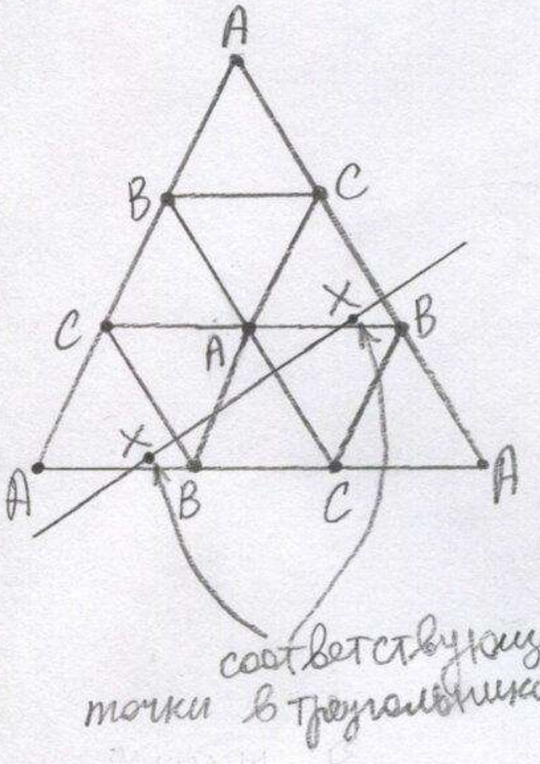
Можно считать, что шар не отражается от стороны треугольника, а продолжает двигаться по прямой, потому что это соответствует движению в симметричном треугольнике.

Замостим плоскость равными правильными треугольниками. Из сказанного выше следует, что движение шара можно представить как движение вдоль одной прямой.

Тогда точка, в которой шар побывал 7 раз — это набор из 7 различных точек, симметричных данной точке в исходном треугольнике.

Легко видеть, что все треугольники замощения на 6 групп треугольников одинаковой ориентации (отличающихся параллельным переносом): $\overset{C}{AB}$, $\overset{A}{BC}$, $\overset{B}{CA}$, $\overset{CA}{B}$, $\overset{AB}{C}$, $\overset{BC}{A}$. По принципу Дирихле найдутся две точки из рассматриваемого набора, лежащие в треугольниках одной группы.

Тогда наша прямая пройдёт через бесконечное число точек, соответствующих данным, в треугольниках этой группы, что и требовалось доказать.



соответствующие точки в треугольниках группы $\overset{C}{AB}$

Задача 7.

Пусть выполнено $a\#c = b\#c$. Существует такой x, что $a\#x = a$.
Существует такое z, что $a\#z = b$. Суперумножим обе части
полученного равенства на x: $a\#z\#x = b\#x$. Отсюда по-
лучаем $b\#x = a\#z\#x = a\#x\#z = a\#z = b$, то есть $b\#x = b$.
Существует такое y, что $c\#y = x$. Суперумножим обе части
равенства $a\#c = b\#c$ на y: $a\#c\#y = b\#c\#y \Rightarrow$
$\Rightarrow a\#x = b\#x \Rightarrow a = b$, что и требовалось доказать.

Задача 6.

Ответ: 750.

$\boxed{\text{Оценка.}}$ Будем на каждом шаге удалять вершину с наибольшим
числом выходящих из неё рёбер (если их несколько — выберем любую).
Когда останется 150 вершин, по условию останется ≥ 150 ребер. Тогда
сумма степеней вершин в этот момент ≥ 300. Поэтому либо най-
дётся вершина степени 3, либо у всех вершин будет степень 2.
Предположим, что на прошлом ходу мы удалили вершину степени
2. Значит, все вершины были степени 2, и в полученном после уда-
ления вершины графе все вершины степени 2. Но это значит,
что у вершин, соединённых с удалённой, была степень 3 и мы
должны были удалить одну из них — противоречие. Поэтому мы
удалили вершину степени ≥ 3. Теперь рассмотрим граф до уда-
ления этой вершины. В нём 151 вершина и ≥ 153 ребра. То есть
сумма степеней вершин $\geq 306 > 151 \cdot 2 \Rightarrow$ есть вершина степени ≥ 3.
$\Rightarrow$ Мы получили его из графа с 152 верш. и ≥ 156 ребрами, и т.д.
Так дойдём до графа с 200 верш. и ≥ 300 ребрами. Сумма степеней
его вершин $\geq 600 = 200 \cdot 3$. Поэтому мы удалили вершину степени
≥ 4 (док-во аналогично приведённому в начале решения), то есть получили его
из графа с 201 верш. и ≥ 304 ребрами. Дойдём до графа с 250 верш. и
≥ 500 ребрами. Аналогично поймём, что мы удалили верш. степени ≥ 5,
то есть получ. его из графа с 251 верш. и ≥ 505 ребрами. В итоге дойдём
до исходного графа с 300 верш. и ≥ 750 ребрами.

$\boxed{\text{Пример.}}$ Граф, состоящий из 50 полных подграфов на 6 вершинах. В нём
$\frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 50 = 15 \cdot 50 = 750$ ребер. Из каждого подграфа мы, при удалении первой
верш., удаляем 5 ребер, при удал. второй — 4 ребра и т.д. Поэтому за 150 ходов
мы можем максимум удалить $5 \cdot 50 + 4 \cdot 50 + 3 \cdot 50 = 600$ ребер. Значит, какие бы
150 вершин мы ни удалили, в графе останется $\geq 750 - 600 = 150$ ребер, то есть
он удовлетворяет условию.