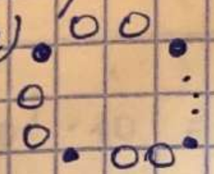
№1 ● - лжец ○ - рыцарь ∠ Ответ: 0 человек

I) есть 2 условия при котором все скажут „да"

1) ○● - рядом с каждым Р стоит Л
2) ○●○ - с двух сторон от Л стоит Р

II) тогда рассмотрим 2 вариации расстановки, которые выполняют условие:

а)



б)

1) разделим на тройки (○●○)
2) может уходить по 1Р из каждой тройки, но не нарушая „равновесие", когда все говорят „да"

⇓ останется

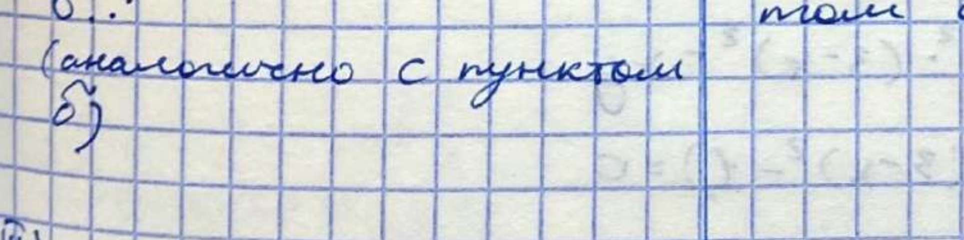
(аналогично с пунктом б)

1) разделим на пары (○●)
2) из каждой второй пары уйдёт Л

⇓ пока не останется

(аналогично с пунктом а)

III) повторяем предыдущие действие, пока не придём к следующей ситуации:



говорит да т.к. никого рядом нет => мин. кол-во ост. человек = 0 => Ответ: 0

№2

$x = y(3-y)^2$
$y = x(3-x)^2$

$a^2+b^2 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$x+y = ?$

1) $x+y = z$

2) $x+y = y(3-y)^2 + x(3-x)^2$
$\cancel{y(3-y)^2 + x}$
$xy = y(3-y)^2 \cdot x(3-x)^2$
$(9-6y+y^2) \quad (9-6x+x^2)$

3) $x+y = y(3-y)^2 + x(3-x)^2$
$z = 9y - 6y^2 + y^3 + 9x - 6x^2 + x^3$
$z = 9z - 6(x^2+y^2) + x^3 + y^3$
$z = 9z - 6(x^2+y^2) + z(x^2 - xy + y^2)$

$z = 9z - 6(x^2+y^2) + z(x^2 - xy + y^2)$

$z = 9z - 6(x^2+y^2+2xy-2xy) + z(x^2 - xy + y^2)$

$z = 9z - 6(z^2 - 2xy) + z(z^2 - 3xy)$

$x = y(3-y)^2$

$y = x(3-x)^2$

$x+y = ?$

1) $x+y = z$

$(x^2+y^2+2xy-2xy$

$+2xy$

$(x+y)^2$

$\underline{x}^2 - xy + y^2 + xy - xy \quad (x+y)^2$

$(x-y)^2$

$z = 9z$

$x^2 - xy + y^2 + 3xy - 3xy = (x+y)^2 - 3xy$

$xy = xy(3-y)^2(3-x)^2 \quad x; y \neq 0$

$1 = (3-y)^2(3-x)^2$

$1 = (3-y)(3-x) \quad$ ОДЗ: $x < 3$

$9 - 3y - 3x + xy = 1$

(тождественно уравнению с ОДЗ $x \geq 3$)

$\cancel{1 = (3-y)^2(x-3)^2 \Rightarrow 1 = (3-y)(3-3}$

$1 = (y-3)^2(x-3)^2 \Rightarrow 1 = (y-3)(x-3)$

ОДЗ: $x \geq 3$

$1 = (y-3)(x-3)$

$(y-3)(x-3) = 1$

$xy - 3y - 3x + 9 = 1$

$xy - 3(x+y) + 9 = 1$

$xy - 3z + 9 = 1$

$xy = 3z - 8$

$z = 9z - 6(z^2 - 2(3z-8)) + z(z^2 - 3(3z-8))$

$z = 9z - 6(z^2 - 6z + 16) + z(z^2 - 9z + 24)$

$8z - 6z^2 + 36z - 6 \cdot 16 + z^3 - 9z^2 + 24z = 0$

$z^3 - 15z^2 + 68z - 6 \cdot 16 = 0$

$\boxed{z^3 - 15z^2 + 68z - 96 = 0}$

Воспользуемся методом подбора рационального корня уравнения 3 степени. Предположим, что уравнение имеет корень $\frac{p}{q}$, тогда p – делитель числа $d = -96$, а q – делитель числа $a = 1$ т. е. $q = 1$. p может быть 2 или 3, тогда корнем уравнения могут быть числа 2 или 3. Рассчёт показал, что 3 является корнем уравнения

$z = 3$

$27 - 15 \cdot 9 + 68 \cdot 3 - 96 = 0$

$0 = 0$

$z^3 - 15z$

Выделим из уравнение множитель $(z-3)$:

$$z^3-3z^2-12z^2+68z-96=0$$

$$z^2(z-3)-12z(z-3)+32z-96=0$$

$$z^2(z-3)-12z(z-3)+32(z-3)=0$$

$(z-3)(z^2-12z+32)=0$ (Решим квадратное уравнение)

$$z^2-12z+32=0$$

$$D=12^2-4\cdot 32$$

$$D=144-128$$

$$D=16$$

$$D>0 \Rightarrow z_1=\frac{+12+4}{2}=\frac{16}{2}=8$$

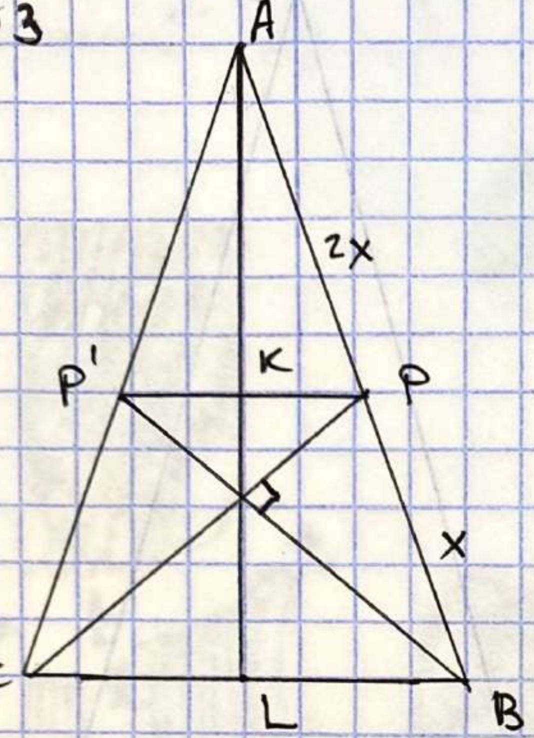
$$z_2=\frac{12-4}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$(z-3)(z-4)(z-8)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} z-3=0 \\ z-4=0 \\ z-8=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} z=3 \\ z=4 \\ z=8 \end{array}\right.$$

Ответ: $x+y=0;\ 3;\ 4;\ 8$

№3



$\overbrace{CP = BP'}^{\text{по усл}} = 1$

(по построению)

1) Пусть P' такая точка, что $CP'/P'A = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{CP'}{P'A} = \frac{1}{2}\right)$

$P'A = AP$ (т.к. $CP' = BP$ отсек. $\Downarrow$ пропор. отрез.)

2) Т.к. $\triangle ACB$ р/б (по усл), то $CP' = BP$ и $PP' \parallel CB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (сл.) $CP'PB$ р/б трапеция

3) Пусть S – это площадь трапеции $CP'PB$ (р/б)

S_1 – площадь $\triangle ALB$

S_2 – площадь $\triangle APK$

тогда $S_1 - S_2 = \frac{S}{2}$

найдём отношение площадей $\frac{S_1}{S_2}$

$S_1 = \frac{1}{2} LB \cdot AL$

$S_2 = \frac{1}{2} KP \cdot AK$

4) из подобия $\triangle APK$ и $\triangle ABL$ следует, что

$\frac{BL}{PK} = \frac{AL}{AK} = \frac{AB}{AP} = \frac{3}{2} \Rightarrow BL = \frac{3}{2} PK$; $AL = \frac{3}{2} AK$;

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} PK \cdot \frac{3}{2} AK = \frac{9}{4} S_2$

5) $\left.\begin{array}{l} S_1 - S_2 = \frac{S}{2} \\ S_1 = \frac{9}{4} S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 = \frac{9}{10} S \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 2 \cdot S_1 = \frac{9}{5} S$

6) ~~max $S_{\triangle ABC}$ достигается при max $S_{трап}$ $CP'PB$~~

Максимум площади $\triangle ABC$ достигается при максимуме площади р/бокой трапеции $CP'PB$.

Максимум площадь трапеции достигается, когда угол между диагоналями $= 90°$ ($S_{трап} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \alpha$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{9}{10}$

Ответ: $S_{\triangle ABC \,(max)} = 0{,}9$

№ 4

x_1	x_2	x_3		x_{10}
x_{11}	. . . .			x_{20}

$\cancel{\cdot}$	$\cdot$	$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$
$\cdot$		

– 11!

– 10!

1 – 20

$x_1 = 11$ вар. для 1 клетки

$x_2 = 10$ вар

$x_3 = 9$ вар

$x_4 = 8$ вар

$x_5 = 7$ вар

$x_6 = 6$ вар

$x_7 = 5$ вар

$x_8 = 4$ вар

$x_9 = 3$ вар

$x_{10} = 2$ вар

$x_{11} = 10$ вар

.

.

.

.

.

$x_{20} = 1$ вар

$$\boxed{11 \cdot 10! \cdot 10! = 11 \cdot (10!)^2}$$

Ответ: $\boxed{11! \cdot 10!}$

№5 Докатем методом от противного.
Предположим, что никто не пожал руку 1 раз
~~Докажем, что ни один человек не пожал руки 19 раз (след~~
Тогда:
Докажем, что ни один человек ~~из условия задачи~~ не пожал руки 19 раз.

Предположим, что нашёлся президент, который пожал руку 19 раз, тогда — возможные кол-ва рукопожатий среди может быть от 2 до 19. (всего 18 вариантов)
0 быть не может так как рассматриваемый президент пожал руки всем.

По принципу Дирихле встретится 2 президента, которые пожали руки одинаковое количество раз. Пришли к противоречию: ни один президент не мог пожать руки 19 раз.

Аналогично докажем, что никто не совершил 18 рукопожатий:

Предположим, что нашёлся президент, который пожал руку 18 раз, тогда среди президентов, кому он пожал руку (18 человек), возможные кол-ва рукопожатий от 2 до 18. (всего 17 вариантов).

По принципу Дирихле встретится 2 президента, которые пожали руки одинаковое кол-во раз. Пришли к противоречию: ни один президент не мог пожать руки 18 раз президентов, кому он пожал руку (19 человек)

~~Аналогично~~ И так далее. В последнем случае рассмотрим вариант, что не может быть 2 рукопожатий. В этом случае возможные кол-ва рукопожатий только 1 вариант (2 рукопожатие), но президентов, кому он пожал руки два => => пришли к противоречию.

Таким образом, мы приходим к противоречию в первоначальном предположении, что никто не пожал руку 1 раз, так как при отсутствии варианта с 1 рукопожатием, ни одного варианта рукопожатий не возможно.

№6

1) Для удобства рассуждения символы # и % заменим на А и Б

2) Всего комбинаций букв 2^{100}, но не все такие слова существуют, так как у некоторых слов отличие будет меньше, чем на 3 буквы.

3) Возьмём первые 3 буквы; все возможные комбинации следующие:

1. А А А
2. А А Б
3. А Б А
4. А Б Б
5. Б А А
6. Б А Б
7. Б Б А
8. Б Б Б

~~существует только~~ пара, чтобы в оставшихся 97 символах была допустима любая комбинация букв и при этом это гарантированно было допустимое слово, среди данного набора существует только пара значений. Например ААА - БББ или АББ - БАА

Допустимая комбинация - это комбинация букв, которая отличается от других комбинаций хотя бы 3 буквами.

Таким образом общее кол-во уникальных слов в языке это $2 \cdot 2^{97} = 2^{98}$

4) Докажите, что 2^{98} меньше, чем 10^{30}

$2^{98} < 10^{30}$ $(10^{30} = 2^{30} \cdot 5^{30})$ $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$

$2^{98} < 2^{30} \cdot 5^{30}$

$2^{68} < 5^{30}$

$2^{34} < 5^{15}$

$17'179'869'184 < 30'517'578'125$

ч.т.д.

№7

$n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$
$m = 2l+1 \quad (l \in \mathbb{Z})$

$3^n - 1 \stackrel{?}{\vdots}\ 2^m - 1$

$3^{(2k+1)}$

$\cancel{((3^2)^k = (3^2)^k \cdot 3\ )}$

$3^{2k+1} = (3^2)^k \cdot 3 = 9^k \cdot 3$

$2^{2l+1} = (2^2)^l \cdot 2 = 4^l \cdot 2$

$3^{(2k+1)} - 1$
$3 \cdot 9^k - 1$
$3 \cdot 9^k - 1$

$2^{(2l+1)} - 1$
$4^l \cdot 2 - 1$
$2 \cdot 4^l - 1$
$1 \quad (l=0)$
$\Downarrow$
$m = 1$
$\Downarrow$

$3^n - 1 \qquad 2^1 - 1$
$3^n - 1 \qquad 2 - 1$
$3^n - 1 \qquad 1$
$\Downarrow$
n - любое положит. нечет. число

(пример)

Ответ: $n = 1$ (n - любое положительное нечет. число)
$m = 1$ (да, существует)

§5 Докажем методом от противного.
Предположим, что никто не пожал руку 1 раз
~~Докажем, что ни один человек не пожал руки 19 раз (след~~
Тогда:
Докажем, что ни один человек ~~из условия задачи~~ не пожал руки 19 раз.

Предположим, что нашёлся президент, который пожал руку 19 раз, тогда возможные кол-ва рукопожатий среди может быть от 2 до 19. (всего 18 вариантов)
0 быть не может так как рассматриваемый президент пожал руки всем.

По принципу Дирихле встретятся 2 президента, которые пожали руки одинаковое количество раз. Пришли к противоречию: ни один президент не мог пожать руки 19 раз.

Аналогично докажем, что никто не совершил 18 рукопожатий:

Предположим, что нашёлся президент, который пожал руку 18 раз, тогда среди президентов, кому он пожал руку (18 человек), возможные кол-ва рукопожатий от 2 до 18. (всего 17 вариантов).

По принципу Дирихле встретятся 2 президента, которые пожали руки одинаковое кол-во раз. Пришли к противоречию: ни один президент не мог пожать руки 18 раз президентов, кому он пожал руку (19 человек)

~~Аналогично~~ И так далее. В последнем случае рассмотрим вариант, что не может быть 2 рукопожатий. В этом случае возможные кол-ва рукопожатий только 1 вариант (2 рукопожатия), но президентов, кому он пожал руки два ⇒ ⇒ пришли к противоречию.

Таким образом, мы приходим к противоречию в первоначальном предположении, что никто не пожал руку 1 раз, так как при отсутствии варианта с 1 рукопожатием, ни одного варианта рукопожатий не возможно.