Задача 2.

Ответ: 0, 4, 8.

Пусть $f(x) = x(3\text{-}x)^2$. Тогда $x = f(y)$ и $y = f(x)$. Следствие: $f(f(x)) = x$.

Решим в рациональных числах уравнение $f(f(x)) = x$.

При раскрытии скобок в левой части получается многочлен 3^2 степени со старшим коэффициентом 1 (т.к. у $f(x)$ 3 степень и старший коэффициент 1).

Значит, все рациональные корни являются целыми.

Докажем, что все целые корни $\in [0; 4]$.

Р/м $g(x) = f(x) - x = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x\text{-}2)(x\text{-}4)$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3x(x\text{-}4) + 9$.

При $x \notin [0;4]$, $f'(x) > 0$ (даже > 9).

При $x < 0$, $g(x) < 0$, т.к. $x<0$, $x\text{-}2<0$, $x\text{-}4<0$. То есть $f(x) < x$.

Кроме того, $f'(x) > 0$, то есть $f(x)$ возрастает.

Значит, учитывая $f(x) < x$, $f(f(x)) < f(x)$, $x < f(x)$. Противоречие.

При $x > 4$, $g(x) > 0$, то есть $f(x) > x$.

Кроме того, $f(x)$ возрастает.

Значит, учитывая $f(x) > x$, $f(f(x)) > f(x)$, $x > f(x)$. Противоречие.

Итак, все целые (а значит, все рациональные) корни принадлежат [0;4]. Переберём x.

0) $x = 0$. $y = f(0) = 0$. $x = f(y) = 0$ – верно. $x+y = 0$.
1) $x = 1$. $y = f(1) = 4$. $x = f(y) = 4$ – неверно.
2) $x = 2$. $y = f(2) = 2$. $x = f(y) = 2$ – верно. $x+y = 4$.
3) $x = 3$. $y = f(3) = 0$. $x = f(y) = 0$ – неверно.
4) $x = 4$. $y = f(4) = 4$. $x = f(y) = 4$ – верно. $x+y = 8$.

Задача 5.

От противного: все пожали хотя-бы 2 руки.

Р/м президента П, пожавшего наибольшее число рук (скажем, N). Тогда все эти N человек пожали различное число рук (иначе условие не выполняется: оба пожали руку П). Но количество рукопожатий для них не более N (т.к. П наибольший).

Если каждый пожал руку хотя-бы 2 раза, то вариантов N-1 (от 2 до N), а людей N. Противоречие (по принципу Дирихле, какие-то два совпадут). Значит, кто-то пожал только одну руку. ЧТД.

Задача 6.

Р/м все последовательности из # и % длины 100 (их 2^100).

Разделим их на группы: в одной группе будут находиться последовательности, у которых первые 98 символов совпадают. Получилось 2^98 групп по 4 шт. в каждой.

Заметим, что последовательности из одной группы имеют 98 общих символов, то есть различаются не более, чем в 2 местах. Значит, словом является не более одной из них.

Но тогда слов не более, чем 2^98. Докажем, что 2^98 < 10^30.

2^49 < 10^15 ?

2^50 < 2 * 10^15?

(2^10)^5 < 2 * 10^15?

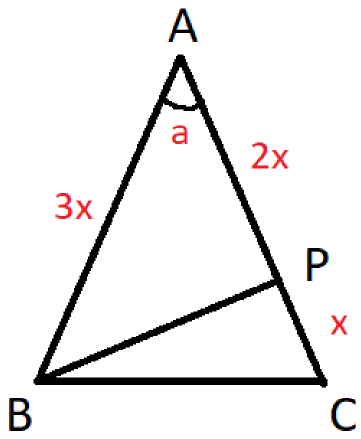
1024^5 < 2 * 10^15?

1.024^5 < 2?

1.024^5 < 1.1^5 = 1.61051 < 2. ЧТД.

Задача 3.

Ответ: 9/10.



Пусть AB = 3x, AP = 2x, PC = x, ∠BAC = a.

Тогда известно (по т.косинусов для ΔBAP), что

$1 = x^2(13 - 12\cos a)$ (1)

Нужно максимизировать $S = 9/2\ x^2 \sin a$ (2)

Подставим x^2 из (1) во (2):

$9/2\ \frac{\sin a}{13-12\cos a}$ = f(a) -> max.

Поймём, при каком максимальном S уравнение f(a) = S имеет решение. Это и будет ответ.

9/2 sina = 13S – 12Scosa

$9/2 \sin a + 12S\cos a = 13S$

Используем метод вспомогательного угла. Тогда нужно, чтобы

$-1 \leq \frac{13S}{\sqrt{\frac{81}{4}+144S^2}} \leq 1.$

Левое неравенство выполнено при всех положительных S.

Правое неравенство выполнено при $169S^2 \leq 81/4 + 144S^2$, откуда $S \leq 9/10$.

Задача 1.

Ответ: 0.

Докажем, что все могут уйти, и ответ «Нет» не прозвучит.

Р – рыцарь, Л – лжец.

Р говорит «Да», если один из соседей Л. Л говорит «Да», если все соседи Р (в том числе, если соседей нет).

Пусть по кругу стоит 3N человек. Поставим N групп РЛР

Индукция по N.

База: N = 1.

Все сказали «Да». Уберём Р. Осталось: РЛ. Оба сказали «Да». Уберём Р. Л сказал «Да» (т.к. у него нет соседей). Уберём Л. Все ушли.

Переход: N-1 -> N.

Р/м одну из групп. РЛР**РЛР**РЛР.

Все сказали «Да». Уберём левого Р из группы. Стало: …РЛР**ЛР**РЛР….

Все сказали «Да». Уберём правого Р из группы. Стало: …РЛР**Л**РЛР….

Все сказали «Да». Уберём Л. Стало: …РЛРРЛР…

Получилась расстановка для N-1 групп. По предположению индукции можно сделать так, чтобы они все ушли. ЧТД.