Лемма 1: $№=1$.

Любое число, кроме 1, можно записать в виде x^{2^n}, где x - не натуральный квадрат, n - целое неотрицательное число единственным способом.

Док-во леммы: 1) Существование представления.

Пусть $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_i - простые числа, n_0 наибольшее неотрицательное целое число, что $НОД(\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_k) \vdots 2^{n_0}$ (n_0 существует т.к. $НОД(\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_k) < 2^{НОД(\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_k)}$)

$НОД(\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_k) \vdots 1$, но

$$x = \underbrace{\left(p_1^{\frac{\alpha_1}{2^{n_0}}} \cdot p_2^{\frac{\alpha_2}{2^{n_0}}} \cdot \dots \cdot p_k^{\frac{\alpha_k}{2^{n_0}}}\right)}_{A}{}^{2^{n_0}}$$

, при этом одно из чисел $\frac{\alpha_i}{2^{n_0}}$ нечётно, иначе n_0 не максимально. Но тогда выражение A - не натуральный квадрат.

2) Единственность. Положим противное, $x^{2^n} = y^{2^m}$

I) $n \neq m$, пусть $n > m$. Тогда $x^{2^{n-m}} = y$ - квадрат равен не квадрату. Противоречие

II) $n = m$, откуда $x = y$ - представления идентичны

Лемма 2: между двумя квадратами находится чётное количество чисел. Действительно,

$(n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n \vdots 2$. Положим, $f(1)=1$

Разобьём неполные квадраты последовательно на пары соседних. ~~Корр~~ Корректность этого действия следует из леммы 2. Положим, это числа a и $a+1$. Тогда определим:

$f(a^{2^n}) = (a+1)^{2^n}$ и $f((a+1)^{2^n}) = a^{2^{n+1}}$

Существование и единственность натурального значения функции для любого натурального числа следуют из леммы 1. ~~Корр~~ Свойство $f(f(n)) = n^2$ выполняется по построению функции.

№2

Назовём элемент смещённым, если во исходной и полученной таблицах он стоит в разных строках. Обратим внимание, что число смещённых элементов в каждой строке одинаково. Посчитаем число подходящих заполнений таблицы с k смещёнными числами в строках. Число способов выбрать ~~остав~~ смещаемые элементы в каждой из строк исходной таблицы — C_{10}^{k}, их положения в заполняемой таблице задаются однозначно. Несмещаемые числа можно перемещать внутри их строк произвольно — $(10-k)!$ способами. Откуда имеем выражение $\left(C_{10}^{k}\cdot(10-k)!\right)^2 = \left(A_{10}^{k}\right)^2$. Значит, итоговый ответ равен:

$$\sum_{i=0}^{10}\left(A_{10}^{i}\right)^2 =$$

Ответ: $\sum_{i=0}^{10}\left(A_{10}^{i}\right)^2$

№ 4

~~Пусть~~ Пусть p - простое число больше 3, и $3^n - 1 \vdots p$. $3^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$ - Малая теорема Ферма.

$3^n \underset{p}{\equiv} 1$, тогда из алгоритма Евклида

$3^{(n;p-1)} \underset{p}{\equiv} 1$. $p-1 \vdots (n; p-1)$, однако т.к. n нечётно, $(n; p-1)$ нечётно, но $p-1$ чётно, значит $\frac{p-1}{2} \vdots (n; p-1)$,

$3^{\frac{p-1}{2}} \underset{p}{\equiv} 1$. Однако по квадратичному закону взаимно~~сти вычетов~~:

$\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{3}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$; $\boxed{\left(\frac{p}{3}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}}$

p может давать остатки 1, 5, 7 и 11 при делении на 12, при этом выделенному равенству удовлетворяют только $p \underset{12}{\equiv} 1$ и $p \underset{12}{\equiv} 11$, значит 3^n-1 не может делиться на простые числа с остатком 5 или 7 при делении на 12.

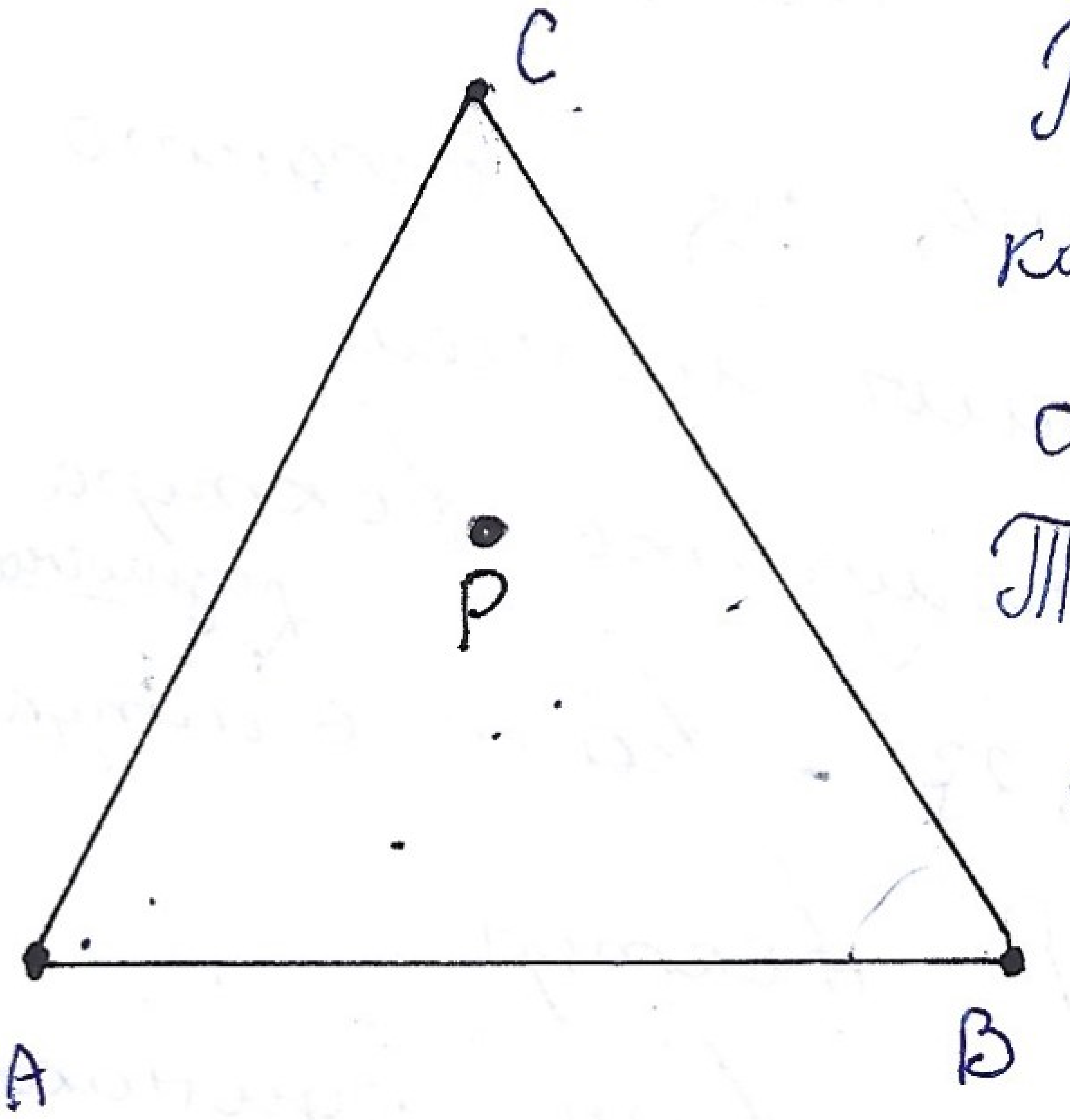
Но $2^m - 1 \underset{3}{\equiv} 1$ и $2^m - 1 \underset{4}{\equiv} 3$ при нечётных $m > 1$, откуда $2^m - 1 \underset{12}{\equiv} 7$, значит 2^m-1 имеет только простые **делители не кратные** 2 и 3, т.е. дающие остатки

1, 5, 7 и 11 при делении на 12, при этом, есть хотя бы 1 простой делитель q, что $q \underset{12}{\equiv} 5$ или $q \underset{12}{\equiv} 7$ и $2^m - 1 \vdots q$, иначе $2^m - 1 \underset{12}{\equiv} \pm 1$.

Значит, поскольку $3^n - 1 \not\vdots\, q$, а $2^m - 1 \vdots q$, то $3^n - 1 \not\vdots\, 2^m - 1$.

Ответ: нет

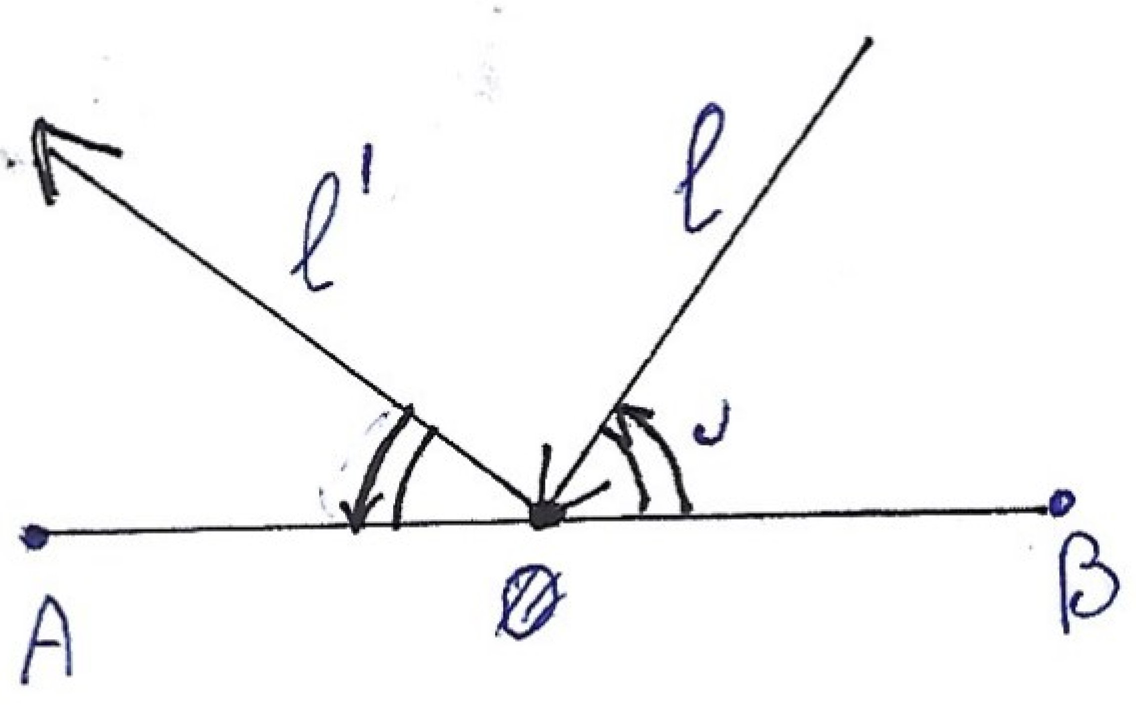
№5



Введём полярную систему координат с вершиной A и ~~стор~~ осью AB.

Тогда траектория шара, находящегося в точке P, задаётся углом направления его.

Рассмотрим, как меняется угол направления вектора траектории при отражении от сторон треугольника (далее все вычисления производятся по модулю 360°)



Заметим, что при отражении от AB $\angle(AB; l) = \angle(l'; AB)$, откуда, если угол исходного вектора равен α, угол отражённого равен $360-\alpha$.

Аналогичные рассуждения можно проделать с BC, для этого необходимо перейти в полярную систему координат с вершиной B и осью BC. При переходе угол направления вектора α' в новой системе равен $\alpha+60°$,

$\alpha' \to 360-\alpha'$; $(\alpha+60) \to 360-(\alpha+60)$;

Рассуждая таким же образом ~~от~~ CA, получим преобразование $\alpha \to 120-\alpha$. ~~Таким образом~~. Следовательно, из исходного вектора траектории угла α, мы можем данными преобразованиями получить вектора вида: $120k \pm \alpha$, где $k \in \{0; 1; 2\}$ – всего 6 штук, различных значит, в точке искомой P вектор траектории шара был направлен одинаково в разные моменты времени t_1 и t_2 – траектория зациклилась, откуда шар побывает в точке P ещё через $(t_2 - t_1)$ – ч.т.д.

№7

Обозначим x_y число, что $x_y \# y = x$

Лемма 1: существует e, что $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \# e = a$. Выберем некоторое a, тогда существует e, что $a \# e = a$. Однако, выбрав другое $b \in \mathbb{R}$, получим: $a \# e \# b_a = a \# b_a$, $b \# e = b$ – лемма доказана.

~~Лемма 2~~ Далее, поскольку $a \# \cancel{e} \# = b \# c$, то $a \# c \# e_c = b \# c \# e_c$, откуда $a \# e = b \# e$, $a = b$. – ч.т.д.