① Из условие, пока все отвечают "да", рядом с каждым рыцарем стоит хотя бы 1 лжец, а рядом с каждым лжецом — 2 рыцаря.

Пусть изначально стояли так: (99 — нечётное)

Пусть циклически выполняется:

1) уходит один из двух рыцарей, стоящих рядом
2) уходит любой из лжецов.

Нетрудно видеть, что изначально и после каждого действия все говорят "да": после 1) рядом с каждым Л 2Р и обратно;
после 2) конфигурация подобна начальной.

Можем продолжать эти шаги, пока не останется 2 человека:
(последние конфигурации выглядят так:)

$$\begin{matrix} & \text{Р} & \\ \text{Л} & & \text{Л} \\ & \text{Р} & \end{matrix} \to \begin{matrix} \text{РР} \\ \text{Л} \end{matrix} \to \begin{matrix} \text{Р} \\ \text{Л} \end{matrix}$$

Для 2 человек $\begin{pmatrix} \text{Р} \\ \text{Л} \end{pmatrix}$ условие ещё выполняется.

Если теперь уйдёт рыцарь, то ответ "нет" вообще не прозвучит.

Если уходит лжец, то рыцарь ответит "нет", тогда

Ответ: 1.

② Подставив второе уравнение из условия в первое:

$$x = x(3-x)^2\left(3 - x(3-x)^2\right)^2 ; \quad x=0 \text{ или}$$

$$1 = (3-x)^2\left(x(3-x)^2-3\right)^2$$

$$\left[\begin{array}{l}(3-x)\left(x(3-x)^2-3\right)=1\\(3-x)\left(x(3-x)^2-3\right)=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(3-x)\left(x^3-6x^2+9x-3\right)=1\\(3-x)\left(x^3-6x^2+9x-3\right)=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x^4-6x^3+9x^2-3x-3x^3+18x^2-27x+9=1\\x^4-6x^3+9x^2-3x-3x^3+18x^2-27x+9=-1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x^4-9x^3+27x^2-30x=1-9\\x^4-9x^3+27x^2-30x=-1-9\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x^4-9x^3+27x^2-30x+8=0\\x^4-9x^3+27x^2-30x+10=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(x-4)(x-2)(x^2-3x+1)=0\\(x^2-5x+5)(x^2-4x+2)=0\end{array}\right.$$

трёхчлены не имеют рац. корней ($\sqrt{D} \in \mathbb{I}$)

корни в $\mathbb{Q}$ 2, 4 + $x=0$

Значения y соотв.:

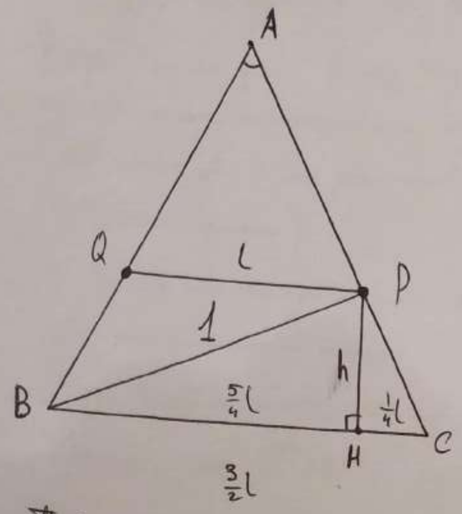
$x=0$: $y = 0 \cdot 9 = 0$ — $0+0=0$

$x=2$: $y = 2 \cdot 1^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ — $2+2=4$

$x=4$: $y = 4 \cdot (-1)^2 = 4$ — $4+4=8$

Ответ: [redacted] 0; 4; 8

③



Пусть $Q \in AB$

$\frac{AQ}{QB} = 2$

$\frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3} = \frac{AP}{AC}$, $\angle A$ общий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle QAP$ (по II пр.) $\Rightarrow \frac{QP}{BC} = \frac{2}{3}$, $QP \parallel BC$ ($\angle Q = \angle B$)

$\Downarrow$ $BQ = PC$ ($\frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}AC$)

$\frac{S_{QAP}}{S_{BAC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{BQPC} = S_{ABC} - \frac{4}{9}S_{ABC} = \frac{5}{9}S_{ABC}$.

Тогда наиб. S_{ABC} при наиб. S_{BQPC}.

$BQ = PC$, $QP \parallel BC \Rightarrow BQPC$ — равнобедная трапеция.

$\angle B + \angle C < 180°$

Тогда $BP = QC = 1$.

Проведём высоту трапеции $PH = h$.

Пусть $QP = L \Rightarrow BC = \frac{3}{2}L$.

Трапеция р/б $\Rightarrow BH = \frac{\frac{3}{2}L + L}{2} = \frac{5}{4}L$, $HC = \frac{1}{4}L$

$\triangle BPH$ п/уг. $h = \sqrt{1 - \frac{25}{16}L^2}$

$S_{BQPC} = \frac{L + \frac{3}{2}L}{2}\sqrt{1 - \frac{25}{16}L^2} = \frac{5}{4}L\sqrt{1 - \frac{25}{16}L^2}$

Поскольку площадь неотрицательна, S_{BQPC} наиб. при S^2_{BQPC} наиб.

$S^2_{BQPC} = \frac{25}{16}L^2\left(1 - \frac{25}{16}L^2\right) = \frac{25}{16}L^2 - \frac{5^4}{4^4}L^4$.

Точки экстремумов соотв. нолям производной:

$f(L) = \frac{25}{16}L^2 - \frac{25^2}{16^2}L^4$, $f'(L) = \frac{50}{16}L - \frac{50^2}{16^2}L^3 = 0$

$L - \frac{50}{16}L^3 = 0$

$L = 0$ или $1 - \frac{50}{16}L^2 = 0$

$L^2 = \frac{16}{50}$, $L = \frac{4}{5\sqrt{2}}$ — достигается.

$S^2_{BQPC\ наиб.} = \frac{25}{16}\cdot\frac{16}{50}\left(1 - \frac{25}{16}\cdot\frac{16}{50}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$S_{BQPC\ наиб.} = \frac{1}{2}$. (>0). $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{9}{5}S_{BQPC} = \frac{9}{10}$.

Ответ: $\frac{9}{10}$.

⑥ Рассмотрим все возможные 100-буквенные последовательности (их 2^{100}).

Разобьём их на пары: в пару объединим две последовательности, если они отличаются только первой буквой. Пар $\frac{2^{100}}{2} = 2^{99}$

(букв только две, и мы рассматриваем все последовательности $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ разбиение возможно)

В каждой паре последовательности отличаются только в одном месте $\Rightarrow$ обе последовательности пары не могут одновременно быть словами.

Тогда слов не больше, чем пар — $\leq 2^{99}$

Докажем, что $2^{99} < 10^{30}$ — из этого следует утверждение задачи.

$$2^{99} < 10^{30} \Leftrightarrow 2^{69} < 5^{30} \Leftrightarrow 2^{70} < 2 \cdot 5^{30} \Leftrightarrow \frac{2^{70}}{5^{30}} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2^7}{5^3}\right)^{10} < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{128}{125}\right)^{10} < 2.$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{10} = 1{,}024^{10} < 1{,}025^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} = \left(\frac{1681}{1600}\right)^5 < \left(\frac{17}{16}\right)^5 < \left(\frac{9}{8}\right)^5 = \frac{59049}{32768} < 2,$$

поскольку $59049 < 60000 < 32768 \cdot 2 \Rightarrow 2^{99} < 10^{30} \Rightarrow$
различных слов на планете не более 10^{30}, ч.т.д.

④ Две строки, десять столбцов. Пусть k чисел в первой таблице были в верхней строке, во второй — в нижней. Тогда количество чисел, переходящих из нижней в верхнюю, тоже равно k.

Выбрать числа для переноса: вверх: C_{10}^k способов
вниз: C_{10}^k, поскольку независимы.

Оставшиеся в своей строке числа внутри строки могут расставляться как угодно
(их $10-k$ уходящих, мест $10-k$ пришедших) $= (10-k)!$ снизу, $(10-k)!$ сверху

Тогда всего для фиксированного k $\left(C_{10}^k \cdot (10-k)!\right)^2 = \left(\frac{10!}{k!}\right)^2$

Для общего количества суммируем по k от 0 до 10.

Ответ: $\sum\limits_{k=0}^{10} \left(\frac{10!}{k!}\right)^2 = 10!^2 \sum\limits_{k=0}^{10} \frac{1}{k!^2}$