Задача 1

$f: N \to N \qquad f(f(n)) = n^2$

Построим пример такой функции.

Пусть $f(1)=1 \Rightarrow f(f(1)) = 1$. $p, q \in N$

Далее будем выбирать два числа $p<q$ для которых еще не дали значения и строить следующую последовательность значений:

$f(p)=q,\ f(q)=p^2,\ f(p^2)=q^2,\ f(q^2)=p^4, \dots$

то есть $f(p^{2^k}) = q^{2^k},\ f(q^{2^k}) = p^{2^{k+1}},\ k \in N_0$

Заметим ее тогда что для выбранных p и q встретятся все значения вида $p^{2^i}, q^{2^i}, i \in N_0$. Такое нетрудно заметить что данное построение удовлетворяет условию задачи: $f(f(p^{2^k})) = f(q^{2^k}) = p^{2^{k+1}} = (p^{2^k})^2$. Остается заметить, что если $a^{2^k} = b^{2^n} \Rightarrow$ (пусть $n>k$) $a^{2^k} = (b^{2^{n-k}})^{2^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = b^{2^{n-k}}$ то есть a и b находятся в последовательности степеней для одного какого-нибудь p. То есть пример строится следующим образом $f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=4$ и т.д. на каждом шаге выбираются наименьшие p и q такие что их значения не были определены. Значит такая функция существует.

Scanned with CamScanner

Задача 2

Покажем что количество способов заполнить таблицу 2×10 равно $\sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^{k}\cdot((10-k)!)^2$. Рассмотрим какое то число x. Заметим что мы либо передвинем по строке, либо по столбцу (в строке 10 клеток), либо оставим на месте. Двигать и по столбцу и по строке мы не можем. Тогда любое заполнение сводится к тому, чтобы выбрать k столбцов, в которых мы поменяем элементы местами. Это можно сделать C_{10}^{k} способами. И далее рассмотреть любую перестановку оставшихся чисел в каждой строке. Для каждой строки это можно делать $(10-k)!$ способами, так как все цифры различны. Итого $(10-k)!^2$ способов. Тогда для $k=0,1,\dots,10$ получим что всего $\sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^{k}((10-k)!)^2$ способов. Посчитаем эту сумму:

$$\sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}((10-k)!)^2 = C_{10}^{0}\cdot 10!^2 + C_{10}^{1}\cdot 9!^2 + C_{10}^{2}\cdot 8!^2 + C_{10}^{3}\cdot 7!^2 + C_{10}^{4}\cdot 6!^2 + C_{10}^{5}\cdot 5!^2 + C_{10}^{6}\cdot 4!^2 + C_{10}^{7}\cdot 3!^2 + C_{10}^{8}\cdot 2!^2 + C_{10}^{9}\cdot 1!^2 + C_{10}^{10}\cdot 0!^2 =$$

$$= 13168189440000 + 1316818944000 + 73156608000 + 3048192000 + 108864000 + 3628800 + 120960 + 4320 + 180 + 10 + 1 = 14561325802271$$

Задача 4

$3^n - 1 \vdots 2^m - 1$, $m \not\vdots 2$, $n \not\vdots 2$

Пусть $2^m - 1 \vdots p$, где $p \in P$. Заметим также что $p \not\vdots 2$ так как $(2^m - 1, 2) = 1$. Тогда рассмотрим показатель 3 по mod p. Заметим что если показатель четный то $n \vdots 2$ (так как показатель n делится на показатель), значит показатель нечетный. Остается заметить что так как $3^{p-1} - 1 \vdots p$ то $p-1 \vdots d$ по малой теореме Ферма где d показатель $\Rightarrow 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ так как $\frac{p-1}{2} \vdots d$ так как d нечетный. Тогда 3 квадратичный вычет по mod p. Покажем что 3 квадратичный вычет по mod p, если $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$. Для этого воспользуемся леммой Гаусса: $(a,p) = 1$

$S = \{ka : 1 \le k \le \frac{p-1}{2}\}$. Через n обозначаем количество остатков в S больше $\frac{p}{2}$.

Если n - четное, a - квадратичный вычет.

Если $p = 12k+1$ то $n = 2k$ (от $2k+1$ до $4k$)

Если $p = 12k+5$ то $n = 2k+1$ (от $2k+1$ до $4k+1$)

Если $p = 12k+7$ то $n = 2k+1$ (от $2k+2$ до $4k+2$)

Если $p = 12k+11$ то $n = 2k+2$ (от $2k+2$ до $4k+3$)

Несложно заметить что $3\left(\frac{p-1}{2}\right) < \frac{3p}{2}$, тогда нас интересуют остатки от $\frac{p}{2}$ до p или k такие что $\frac{p}{2} < 3k < p$. Значит $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$

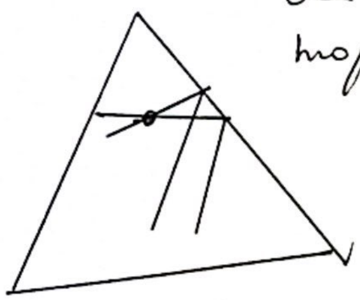
Scanned with CamScanner

Тогда 2^m-1 представляется в виде простых каждое из которых дает остаток $1, 11$ по mod 12.
$\Rightarrow 2^m-1 \equiv \pm 1 \pmod{12}$. $\Rightarrow$ $2^m \equiv 0, 2 \pmod{12}$.
Осталось заметить что $2^m \not\equiv 0 \pmod{12}$ так как $2^m \not\vdots\, 3$. И также $2^m \not\equiv 2 \pmod{12}$ при $m \geq 2$ так как $2^m \vdots\, 4$ и $12 \vdots\, 4$. Значит таких натуральных m и n больших 1 не существует.

Scanned with CamScanner

Задача 5

Рассмотрим точку в которой шар был 7 раз. Рассмотрим движение шара через эту точку. Всего возможно 6 движений шара (если пронумеруем стенки стола 1, 2, 3). Тогда возможные движения (отбился от 1, полетел на 2) 1→2, 2→1, 3→1, 1→3, 2→3, 3→2. По принципу Дирихле он побывал в точке дважды во время одного и того же движения. Пусть это 1→2. Тогда все следующие его отскоки и траектории будут отличаться на фиксированный угол. То есть его путь после первого попадания в точку во время движения 1→2 будет отличаться на какой-то поворот от пути после второго попадания в точку (так как в бильярде угол падения равен углу отражения то угол между траекториями будет фиксирован). Рассмотрим траекторию S_1 от первого прохода через точку (во время движения 1→2) до второго прохода через точку. Тогда S_2 - траектория после второго прохождения. Так как S_2 получается из S_1 лишь поворотом проходящим через искомую точку, то путь S_2 пройдет через искомую точку еще. То есть шар прокатится через искомую точку еще один раз.



Задача 6

Покажем что ответ 750. Построим пример для 750 ребер. Разобьем все вершины на 50 групп по 6 вершин. И проведем все ребра внутри каждой из групп! Тогда если убрать из каждой группы по 3 вершины, останется ровно 150 вершин и 150 ребер. Осталось заметить что если мы убрали как-то по другому вершины, это означает что к некоторым группам (сейчас считаем что в группе 3 вершины осталось, покажем что любое другое убирание вершин оставит не меньшее число ребер) мы должны добавить вершины, а у некоторых убрать. Осталось заметить что количество добавляемых вершин равно количеству убираемых вершин, и каждая убираемая вершина убирает не более 2 ребер, а каждая добавляемая добавляет не менее 3. Значит меньше 150 ребер получиться не может. Покажем теперь что должно быть не менее 750 ребер. Рассмотрим граф, также разбитый на группы (теперь могут быть проведены ребра между группами). Осталось заметить что если есть ребро между вершинами из разных групп, то его можно перенести и заполнить отсутствующее ребро в одной из групп

Такими действиями мы получаем сто было проведено ребра лишь внутри групп. Так как если в каждой группе оставить 3 вершины, то будет ровно 150 ребер => если какого-то ребра нет то возможно убрать 150 вершин так, чтобы оно входило в оставшиеся ребра, но так как его нет, ребер будет меньше 150. Итого не менее 750 ребер.