№1.

Да, существует.

Пусть $f(1)=1$, а остальные нат. числа, не являющиеся квадратами, разобьём на пары $(a;b)$: $(2;3)$; $(5;6)$; $(7;8)$; ... .

Пусть $f(a^{(2^k)}) = b^{(2^k)}$, а $f(b^{(2^k)}) = a^{(2^{k+1})}$

Тогда $f(f(a^{(2^k)})) = a^{(2^{k+1})} = a^{2(2^k)} = \left(a^{(2^k)}\right)^2$

При этом, т.к. пары $(a;b)$ содержат все квадраты, a^{2^k} и b^{2^m} принимают как значения ~~покрывают~~ всё мн-во нат. числа, исключая 1.

Таким образом, требуемая ф-ция существует.

№2.

Рассмотрим, сколько сущ. ~~мозаик~~ способов расст., в которых n и чисел из столбца 1 попали во второй. Тогда и чисел из второго ~~способа~~ столбца попало в первый. ~~Кх~~ В каждом столбце эти числа можно выбрать C_{10}^{n} способами, а остальные можно расставить $(10-n)!$ способами для каждого из столбцов.

Значит всего искомых способов расстановки

$$\left((10-n)!\cdot C_{10}^{n}\right)^2$$

, т.к. столбца 2.

А значит, всего способов расстановки, удовл. условию задачи

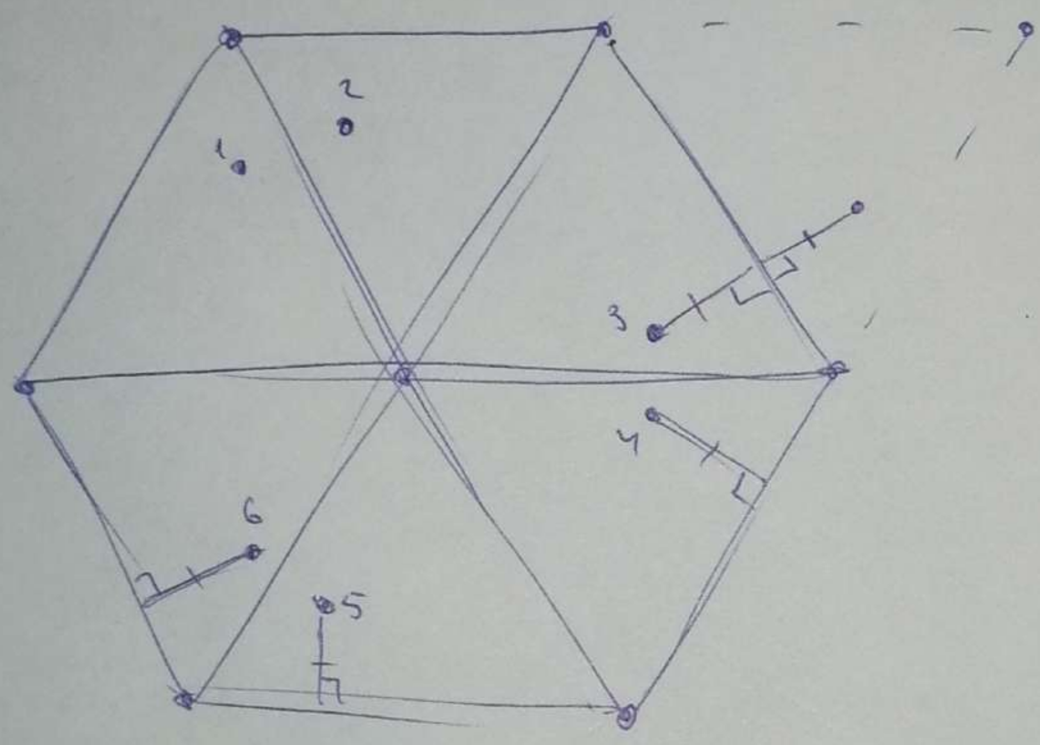
$$(10!\cdot C_{0}^{10})^2+(9!\cdot C_{1}^{10})^2+\ldots+(1!\cdot C_{9}^{10})^2+$$

$$+(0!\cdot C_{10}^{10})^2=300180111105801$$

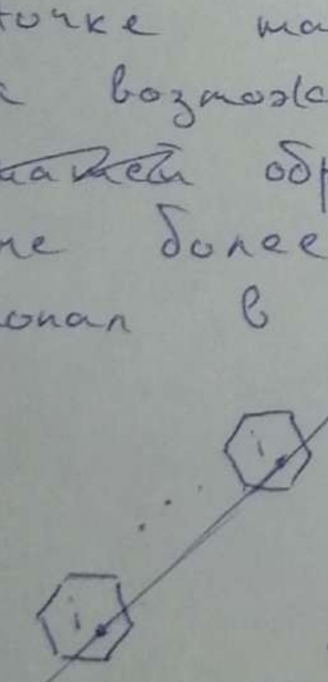
Ответ: 30018011115801

№5.

Бесконечно много раз отразим наш △ отн. своих сторон
Тогда вся плоскость будет периодично замощена такими шестиугольниками:



Т.к. мяч побывал в некоторой точке маршрута семикратно, а возможных различных положений ~~таких~~ образов нашей точки не более 6, то он дважды попал в образ одного типа i.



Из периодичности мозаики следует, что прямолин. образ его траектории он ещё бесконечно много раз попадёт в образ точку типа i, а значит, в изначальном △ он пройдёт через ту точку и восьмой раз

ЧТД.

№4.

$3^m - 1 \vdots 2^n - 1$

Т.к. $n \not\vdots 2$, то $2^n - 1 \equiv 2 - 1 = 1 \ (3)$, а значит, т.к. 3-простое, $((2^n - 1); 3) = 1$.

Пусть $\varphi(2^n - 1)$ - значение ф-ции Эйлера для $2^n - 1$.

Т.к. $2^n - 1 > 2$; то $\varphi(2^n - 1) \vdots 2$

Значит:

$$3^{\varphi(2^n-1)} - 1 = 3^{2q} - 1 \vdots 2^n - 1$$

$$3^m - 1 \vdots 2^n - 1$$

Рассмотрим произвольное p из разложения $2^n - 1$ на мн-тели:
(разложение $\exists$ т.к. $n > 1$ и $2^n - 1 > 1$).

$$3^{2q} - 1 \equiv 3^m - 1 \ (p)$$

$$3^{2q} \equiv 3^m \ (p)$$

$\Downarrow$ т.к. $m \not\vdots 2$

3 - кв. вычет по модулю p.

Из кв. з-на взаимности:

$$\left(\frac{p}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}}$$

$\left(\frac{3}{p}\right) = 1$ по предположению 3 - кв. вычет

$\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \equiv 1 \ (3) \\ p \equiv 1 \ (4) \end{cases} \\ \begin{cases} p \equiv -1 \ (3) \\ p \equiv -1 \ (4) \end{cases} \end{array}\right. \overset{\text{КТО}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} p \equiv 1 \ (12) \\ p \equiv -1 \ (12) \end{array}\right.$$

Но, $2^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv -1 - 1 \equiv -2 \ (3)$ и

$2^n - 1 = 4 \cdot 2^{k} - 1 \equiv -1 \ (4)$ (т.к. $n > 1$)

Из КТО следует, что $2^n - 1$ всегда сравнимо с 1 и тем же числом по мод. 12, семёркой.

$$2^n - 1 = \prod_{i=0}^{g} p_i$$

$$2^n - 1 \equiv (-1)^l \quad (12)$$

$$7 \equiv (-1)^l \quad (12)$$

Противорение! Значит, таких $(m; n)$ не существует.

№7.

Докажем лемму о существовании единичного элемента (Л1):

$\exists e : \forall a : a \# e = a$

Зафиксируем некое a –
Для некоторого a такой элемент существует (из свойства $\forall (a;b)\ \exists c : a \# c = b$):

$a \# e = a$

Докажем теперь, что e – ед.
элемент для любого b. Пусть существует некое b такое, что $b \# e \neq b$, тогда:
Пусть c такое число, что
$a \# c = b$. Оно существует по св-ву.

$$(a \# e) = (a)$$

$$(a \# e) \# c = (a) \# c$$

$$a \# (e \# c) = (a) \# c \quad \text{св-во } \#$$

$$a \# (c \# e) = (a) \# c \quad \text{св-во } \#$$

$$(a \# c) \# e = (a \# c) \quad \text{св-во } \#$$

$$b \# e = b$$

Полученное противоречие доказывает Л1.

Вернёмся к условию

$$a \# c = b \# c$$

Пусть $\bar{c}$ такое число, что

$c \# \bar{c} = e$ (такое существует по св-ву; e существует по III)

$$(a \# c) \# \bar{c} = (b \# c) \# \bar{c}$$

св-во $\#$

$$a \# (c \# \bar{c}) = b \# (c \# \bar{c})$$

$$a \# e = b \# e$$

$$a = b$$

ЧТД.