Задание 1

Ответ: 0. Докажем, что все 99 человек смогут уйти. Т.к мы считаем, что все люди смогут уйти, то ответа „нет" прозвучать вообще не должно, а это значит что 1) двух подряд стоящих лжецов не бывает, т.к один из них скажет „нет".
2) трех подряд рыцарей не бывает, т.к средний из них скажет „нет", т.е. у нас есть максимум группы из двух стоящих подряд рыцарей. Докажем, что таких групп нечетное кол-во. Предположим, что это не так. Тогда заметим, что между двумя такими группами стоит нечетное число людей. Действительно, между двумя такими промежутками будет последовательность чередующихся рыцарей и лжецов, которая начинается и заканчивается лжецом, т.е. кол-во членов этой последовательности нечетно. Заметим также, что число промежутков между нашими группами будет равно кол-ву групп, т.е в этом случае четно. Получаем, что Ч число промежутков • Н кол-во людей в каждом + Ч число групп по 2 рыцаря в каждом, т.е. всего у нас должно быть четное число людей, а т.к у нас 99, т.е противоречие, а значит групп из 2 рыцарей нечетное кол-во. (Ч-четное; Н-нечетное)

Теперь приведем стратегию при которой достигается минимальное кол-во оставшихся — 0. Каждым ходом будем удалять по 1 рыцарю из каждой группы из 2 рыцарей. Все по прежнему после каждого хода будут говорить „да", т.к. рядом с каждым рыцарем есть лжец и рядом с каждым лжецом нет лжеца. Таким образом мы удалим нечетное кол-во рыцарей и суммарно получим 99 - нечетное = четное число людей. Более того, эти люди будут чередоваться, т.к мы удалили все группы из 2 рыцарей, а групп из лжецов и не было. Значит мы получим „бусы": РЛРЛРЛ...Л (по кругу). Теперь каждые 2 хода мы первым из них удаляем любого лжеца, а вторым - рыцаря, который стоял рядом с этим лжецом. Заметим, что и перед вторым ходом, и после него все скажут „да", т.к после 1 хода единственное что поменялось - появилась группа из 2 рыцарей, а она нас устраивает, а после второго мы снова получим „бусы". Таким образом мы доходим до момента, когда у нас останется 1 рыцарь и 1 лжец. Удаляем рыцаря. После этого лжец скажет „да", т.к у него нет соседа лжеца. После этого удаляем лжеца. В итоге у нас остается 0 человек.

Задание 2 (начало)

$$\begin{cases} x = y(3-y)^2 \\ y = x(3-x)^2 \end{cases}$$

Перемножим эти равенства. $xy = xy\,(3-y)^2\cdot(3-x)^2$. Получаем 2 случая:

(1) $xy = 0$. А это значит, что либо $x=0$, либо $y=0$. Пусть $x=0$. Тогда $y = 0\cdot(3-0)^2$, т.е y тоже равно 0. Пусть $y=0$, аналогично $x = 0(3-0)^2$, т.е. $x=0$. Значит в этом случае $\boxed{x+y=0+0=0}$

(2) $xy \neq 0$, а значит сократим обе части равенства на xy. $(3-y)^2\cdot(3-x)^2 = 1$. Тоже получаем 2 случая:

1) $(3-y)(3-x) = 1$

2) $(3-y)(3-x) = -1$.

Разберем каждый из них:

1) $(3-y)(3-x) = 1$

$9 - 3x - 3y + xy = 1$

$8 - 3(x+y) + xy = 0$

Но мы знаем, что сложив исходные равенства, получим: $x+y = y(3-y)^2 + x(3-x)^2$

$x+y = x^3 - 6x^2 + 9x + y^3 - 6y^2 + 9y$

$x+y = (x+y)(x^2 - xy + y^2) - 6(x^2+y^2) + 9(x+y)$

$$\begin{cases} x+y = (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) - 6\left((x+y)^2 - 2xy\right) + 9(x+y) \\ 8 - 3(x+y) + xy = 0. \end{cases}$$

Пусть $x+y = t$; $xy = k$. Тогда:

$$\begin{cases} t = t(t^2-3k) - 6(t^2-2k) + 9t \\ 8 - 3t + k = 0. \end{cases}$$

Задание 2 (продолжение)

$$\begin{cases} t^3-15t^2+68t-96=0 \\ k=3t-8. \end{cases}$$

Заметим, что $t=3$ подходит, а значит:

$(t-3)(t^2-12t+32)=0.$

$t^2-12t+32=0$

$t_1=\frac{12+4}{2}=8$

$t_2=\frac{12-4}{2}=4$

$t=3;4;8.$

$t=x+y$, а значит в этом случае $\boxed{x+y=3;4;8}$

2) $(3-y)(3-x)=-1$ Пусть $x+y=t$; $xy=k$.

Аналогично 1 случаю:

$$\begin{cases} t^3-15t^2+74t-120=0. \\ k=3t-10 \end{cases}$$

Заметим, что $t=4$ подходит.

$(t-4)(t^2-11t+30)=0.$

$t^2-11t+30=0$

$t_1=\frac{11+1}{2}=6$

$t_2=\frac{11-1}{2}=5$

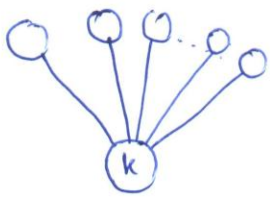
$t=4;5;6$, а значит т.к. $t=x+y$, то $\boxed{x+y=4;5;6}$

Получаем, что $x+y$ может быть равно $0;3;4;5;6;8.$

Ответ: $0;3;4;5;6;8.$

Задание 5.

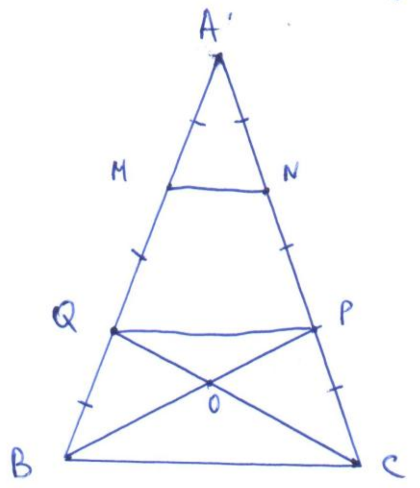
Пусть президенты будут вершинами графа и если 2 президента пожали друг другу руки, то между ними проведем ребро. Рассмотрим вершину с наибольшей степенью, пусть эта степень равна k. Заметим, что $k \leq 19$, т.к. любой президент мог пожать только руки всех остальных президентов, кроме него, т.е. 19.



Предположим, что нет такого человека, который бы пожал ровно одну руку. Заметим также, что среди тех, кому пожал руку президент со степенью k (наш выбранный), нет президента со степенью 0, т.к. он пожал хотя бы 1 руку нашему выбранному президенту. Т.е. минимальная степень среди тех, кому пожал руку наш президент равна 2. Заметим также, что среди тех, кто пожал руку нашему президенту нет равных по степени вершины президентов, иначе получим противоречие по условию задачи ((если у них одинаковое число рук, то нет президента, которому они бы пожимали руки оба, а у нас он есть - наш выбранный)

Получаем, что у нашего президента есть k человек, которому он пожал руку, минимальная степень каждого у них - 2 и эти степени различны, но это невозможно, т.к. у нас либо будет президент со степенью вершины 1, что по нашему предположению невозможно, либо будут 2 президента с одинаковой степенью, что тоже невозможно, а значит мы получим противоречие, т.е у нас обязательно есть президент, который пожал ровно 1 руку.

Задание 3



Дано:

$\triangle ABC$ $(AB = AC)$

$AP = 2PC$

$BP = 1$

Найти:

S_{ABC} - макс?

Решение:

Отметим точку N на стороне AC, как середину AP. Тогда $AN = NP = PC$. Точки M и Q на стороне AB таковы, что $AM = MQ = QB$, но т.к. $AB = AC$, то $AM = MQ = QB = AN$. Пусть $S_{AMN} = S$. Тогда из подобия треугольников AMN и ABC $\Rightarrow$, что $S_{ABC} = 9S$. $S_{AQP} = \frac{4}{9} S_{ABC} = 4S$. Тогда $S_{BQPC} = 9S - 4S = 5S$. Площадь треугольника ABC будет максимальна в том случае, если $9S$ будут максимальны, а значит $5S$ тоже должно быть максимальным, т.е нам нужно найти максимальную площадь $BQPC$.

Заметим, что $BQPC$ - равнобокая трапеция, т.к. $BQ = PC$; $QP \parallel BC$ по т-ме Фалеса, а это означает, что $S_{BQPC} = \frac{QC \cdot BP}{2} \cdot \sin\angle QOB$, но $QC = BP = 1$, т.к. $BQPC$ - равнобокая трапеция, а значит $\boxed{S_{BQPC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle QOB.}$ Эта площадь будет максимально возможной при $\angle QOB = 90^\circ$ и будет равна $\frac{1}{2}$. Т.е. $5S = \frac{1}{2}$, а значит $9S = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

Ответ: 0,9

Задание 6 (начало)

Пусть $F(n)$ - размер словаря слов длины n. Тогда нам нужно доказать, что $F(100) \le 10^{30}$. Заметим, что $F(100) \le 8 \cdot F(100-3\cdot1) \le 8^2 \cdot F(100-3\cdot2) \le 8^3 \cdot F(100-3\cdot3) \ldots$ $\ldots \le 8^{32} \cdot F(100-3\cdot32) = 8^{32} \cdot F(4)$. Это связано с тем, что слово длины n мы строим по слову длины $n-3$, дописывая к нему ~~в конец~~ 3 буквы. Различных вариантов выбора этих букв ровно $2^3=8$, т.е. действительно $F(100) \le 8^{32} \cdot F(4)$. Докажем, что $F(4) \le 8$. Пусть буква „#" будет „1", а буква „%" - 0. Тогда у нас получаются следующие слова: (слов длины 4 из 2 букв ровно $2^4=16$)

1. 0000
2. 0001
3. 0010
4. 0011
5. 0100
6. 0101
7. 0110
8. 0111
9. 1000
10. 1001
11. 1010
12. 1011
13. 1100
14. 1101
15. 1110
16. 1111

Заметим, что из каждой отмеченной пары мы можем выбрать не более одного слова, т.к. оба слова пары имеют по 3 одинаковых символа => выбор обоих из них противоречит условию задачи. Таким образом $F(4) \le \frac{16}{2} = 8$. Теперь нам осталось доказать, что $8^{32} \cdot 8 < 10^{30}$. Докажем это

$2^{96} \cdot 2^3 \vee 10^{30}$

$2^{99} \vee 10^{30}$

Если мы докажем, что $2^{100} < 10^{30}$, то 2^{99} тоже будет $< 10^{30}$.

$2^{100} = (2^{10})^3 = (1024)^3 < (10.000)^3 = \underbrace{1000000000000}_{12 \text{ нулей}}$

$10^{30} = \underbrace{10000\ldots0}_{30 \text{ нулей}}$

Таким образом, мы видим, что $10^{30} > 2^{100}$, а соответственно $F(100) < 10^{30}$.

Задание 6 (продолжение)

$2^{99} \vee 10^{30}$

$(2^{33})^3 \vee (10^{10})^3$

$2^{33} \vee 10^{10} = 10.000.000.000.$

$8\cdot 2^{30} = 8\cdot(2^{10})^3 = 8(1000+24)^3 = 8(10^9 + \underbrace{3\cdot 10^6\cdot 24}_{<10^8} + \underbrace{3\cdot 10^3\cdot 24^2}_{<10^7} + \underbrace{24^3}_{<10^6})$

$8(10^9 + 3\cdot 10^6\cdot 24 + 3\cdot 10^3\cdot 24 + 24^3) < 8\cdot 10^9 + 8\cdot 10^8 + 8\cdot 10^7 + 8\cdot 10^6 = 8888.000.000$

$8.888.000.000 < 10.000.000.000$, а значит $2^{99} < 10^{30}$. Что и требовалось доказать.