№1

№1. На самом деле, такая функция строится несложно. В процессе решения натуральные числа будем ~~помечать~~ вычеркивать.

шаг 1: Пусть $f(1)=1$, ~~пометим~~ вычеркнули 1.

Нам в любом случае придется вычеркивать каждое натуральное число. Достаточно разумно на каждом i-ом шаге выбирать два минимальных невычеркнутых натуральных числа a_i и b_i, положить $f(a_i)=b_i$ и вычеркнуть их.

Например:

шаг 2: На данном этапе мы вычеркнули только 1. Берем следующие два натуральных числа так, чтобы они были минимальными
пусть $f(2)=3$, тогда $f(f(2))=4$.

Таким образом, мы сразу вычеркнем $2, 2^2, 3$.

На самом деле, ещё на этом шаге можно вычеркнуть все числа вида 2^{2^n} и 3^{2^n} из аналогичных соображений.

Действительно, $f(f(2^{2^n}))=2^{2^{n+1}}$, для тройки аналогично.

Итак, на данном этапе мы вычеркнули числа $2, 3, 4$ и все числа из сопутствующих им серий 2^{2^n} и 3^{2^n}.

шаг 3: ~~пусть~~ Следующим минимальным числом яв-ся 4, но мы его уже вычеркнули.

пусть $f(5)=6$, тогда мы сразу вычеркиваем все числа вида 5^{2^n} и 6^{2^n} ($f(f(5))=25$ попадает в первую серию)

<u>Шаг 4:</u> $f(7)=8$ (вычеркнули 7^{2^n} и 8^{2^n})

<u>Шаг 5:</u> Следующее минимальное число — 9, но мы его пропускаем, как сделали в шаге №3.

$f(10)=11$ (вычеркнули 10^{2^n} и 11^{2^n}).

Если проделать эту операцию для каждого натурального числа, мы вычеркнем все.

Теперь докажем, что каждое число было вычеркнуто только один раз.

Заметим, что в основании серии вида n^{2^m} (основание — число n) не может лежать полный квадрат ($n, m \in \mathbb{N}$). Действительно, т.к. на каждом шагу мы выбирали минимально возможные значения a_i и b_i, попутно вычеркивая числа вида $a_i^{2^n}$ и $b_i^{2^n}$, мы также вычеркивали и всевозможные полные квадраты чисел из этих серий. Для произвольного a_i справедливо, что $(a_i^{2^n})^2 = a_i^{2^{n+1}} \Rightarrow$ тоже попадает в серию вычеркиваний.

Теперь докажем, что в натуральных числах не выполняется рав-во $a^{2^n} = b^{2^m}$ (1), $a \neq b \in \mathbb{N}$ и не яв-ся полными квадратами, n и m — произвольные натуральные. Случай, если $a \perp b$ очевиден. В разложении чисел a^{2^n} и b^{2^m} на простые мн-ли у них не совпадёт ни один множитель, Если $a \neq b$, можно опереться на основную теорему арифметики. Напомню условие, что $a \neq b$. Тогда a^{2^n} и b^{2^n} представимы в виде

$a^{2^n} = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\beta_1} \cdots p_i^{\varphi_1})^{2^n}$

$b^{2^n} = (q_1^{\alpha_2} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_j^{\varphi_2})^{2^m}$ где p и q – простые множители.

Случай, если мн-ва $\{p_1; p_2; \dots; p_i\}$ и $\{q_1; q_2; \dots; q_j\}$ не совпали, очевиден. Действительно, каждое число раскладывается на простые множители единственным образом $\Rightarrow$ в таком случае рав-ва $a^{2^n} = b^{2^m}$ быть не может.

Допустим, мн-ва совпали, тогда $a^{2^n} = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i})^{2^n}$ и $b^{2^m} = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_i^{\beta_i})^{2^m}$

Чтобы выполнялось рав-во (1) необходимо, чтобы ~~и~~ выполнялись следующие условия:

$$\underbrace{\alpha_1 \cdot 2^n = \beta_1 \cdot 2^m;\ \alpha_2 \cdot 2^n = \beta_2 \cdot 2^m;\ \dots\ \alpha_i \cdot 2^n = \beta_i \cdot 2^m}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \cdot 2^{n-m} \\ \beta_2 = \alpha_2 \cdot 2^{n-m} \\ \vdots \\ \beta_i = \alpha_i \cdot 2^{n-m} \end{cases}$$

И тут у нас есть 2 случая:

1) $n = m$:

степени простых множителей чисел a и b совпадут, а в таком случае из условия случая (мн-ва простых множителей совпадают) ~~что~~ следует, что $a = b$, противоречие.

2) $m \neq n$.

Тогда несложно видеть, что β_i — всегда чётное число $\Rightarrow \left(p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \dots p_i^{\beta_i}\right)^{2^n} = b$ — полный квадрат. То есть равенство (1) в таком случае может достигаться т.т.к. одно из чисел — полный квадрат, но у нас a и b — не полные квадраты по условию.

Итак, ф-ция определена на мн-ве натуральных чисел и принимает только натуральные значения, причём только по одному разу.

Ответ: существует.

№4

Заметим, что при любых нечетных n и m, принадлежащих натуральным числам числитель дроби будет всегда четным (3 в нечетной степень всегда оканчивается на 3, 7, еще вычитаем единицу, то числитель будет заканчиваться на 2 или 6), а число в знаменателе всегда нечётное (2 в нечетной степени всегда оканчивается на 2, 8, еще вычитаем единицу, то есть знаменатель оканчивается на 1, 7). Но числа разной чётности не могут делиться друг на друга нацело, следовательно ответ нет. (ответ был бы положительным, если бы n и m разрешалось быть любыми, например, при m = ± 1 решения всегда найдутся, ну и при многих других отрицательных значениях).

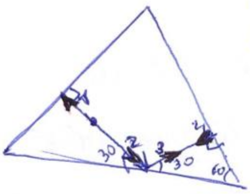
Ответ: не существуют.

№5.

Рассмотрим неск-ко случаев:

~~1)~~ Пусть угол запуска $= \alpha$.

1) $\alpha = 90°$. Очевидно, что угол падения = углу отражения

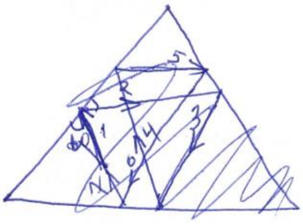


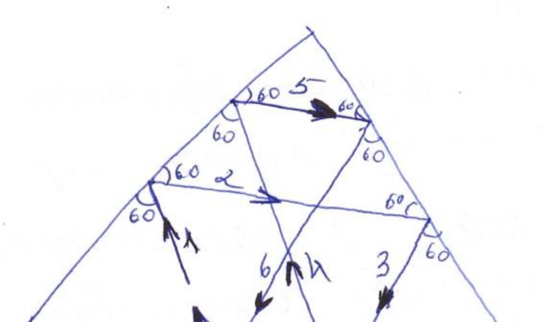
Не сложно видеть, что при запуске шара под таким углом произойдет зацикливание траектории. На рисунке стрелочками я маленькими ~~иным~~ обозначил траекторию движения.

Т.к. движение зациклится, то, очевидно, каждую точку траектории шар пройдет беск. кол-во раз.

2) $30° \leq \alpha < 90°$:

Для наглядности приведу пример с $60°$, т.к. при остальных углах из промежутка траектория ~~т~~ тоже зациклится, но за большее кол-во отскоков, потому что траектория такие, но



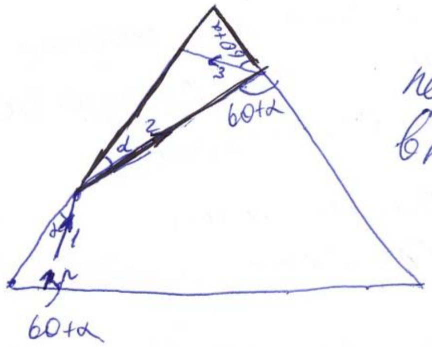


Я не соединил 1 и 7 траектории для красоты, но они совпадут.

И так, тут траектория также зацикливается

3) $0° < \alpha < 30°$

~~Опять, не приведу пример на частном случае, но с остальными углами сработает аналогично. Пусть $\alpha = 10$.~~



В таком случае после первого отскока следующее врезание произойдет под углом $60+\alpha$. Действительно, угол падения — внешний для Δ с углами 60 и α (выделен на рисунке). После второго отскока мы попадаем во второй случай, в кт движение зацикливается.

А в траекторию ~~от~~ 1 можно попасть из траектории n (кол-во отскоков +1) только под углом $60+\alpha$ (под попаданием в траекторию подразумевалось совпадение прямых, содержащих траектории).

4) $90 > \alpha \geq 180$

Просто случай, обратный прошлому, шар ~~будет~~ по факту падает под углом $\underline{180-\alpha}$

И так, я рассмотрел все случаи. В каждом траектория шара зацикливается спустя неск-е количество отскоков ⇒ если шар прошел через одну точку 7 раз, то пройдет и восьмой, девятый, десятый и т.д.

№6

Ответ: 750.

1)

Данный граф не может быть связным.

Доказательство этого факта оставлю читателю как несложное упражнение.

2)

Из пункта 1 следует, что граф несвязный.

Рассмотрим несколько случаев.

(Причём в каждом из случаев я буду говорить исключительно про замкнутые графы, не про

рис 1

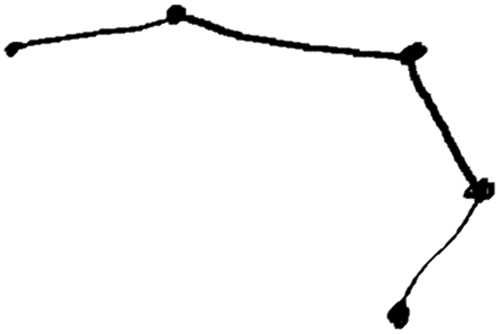
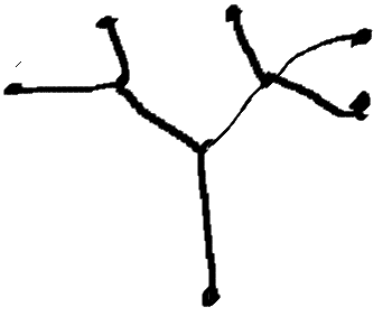


Рис 2



Граф с рис.1 не подходит потому, что в нём можно удалять вершины так, что рёбер не останется вовсе (например, если с самой правой и удалять через одну))

Граф с рис.2 не подходит потому, что в таком графе максимальное количество рёбер = V-1, где V -количество вершин => при всяком разбиении количества вершин на группы и образовании из каждой группы графов такого вида количество вершин при удалении 150и вершин будет < 150.

Рассмотрим несколько случаев :

А) Граф состоит из 150и графов с двумя вершинами. Он, очевидно, нам не подходит, ведь если в каждом таком графе удалить по одной вершине (это мы удаляем сейчас 150 вершин, как в условии), рёбер не останется вовсе.

Б) Граф состоит из 100а связных графов с тремя вершинами. Тогда, опять же удаляя 150 вершин, мы получим кол-во рёбер очевидно меньшее 150 (например, у 75и треугольников удалить по 2 вершины, тогда останется всего 25 треугольников, 75 вершин)

В) Граф состоит из 75и связных графов с 4 вершинами, тогда выгодно из каждого графа удалить по две вершины, останется 75 рёбер

Г) Граф состоит из 60и связных графов на 5 вершин. Этот случай уже более интересный.

Во-первых, важно понять, что если нам и может подойти такой вариант, то графы должны быть полными. Действительно, в противном случае при удалении двух вершин такого графа далеко не всегда останется треугольник, а нам нужно, чтобы оставались треугольники, чтобы увеличить значение минимального количества рёбер после удаления 150и вершин до 150и.

Также можно рассуждать из соображений симметрии. Нам нужно, чтобы, как бы мы не удаляли рёбра, всегда оставалось одно и то же количество рёбер, одни и те же фигуры, а такое действительно возможно тогда и только тогда, когда граф полный.

Покажу на наглядном примере. Пусть графы несвязные. Тогда давайте из 50и графов удалим по 2 вершины так, что оставшиеся графы не будут треугольниками (что безусловно возможно сделать). Тогда у нас останется 50 графов с двумя ребрами (граф из трёх вершины, который не является треугольником может иметь максимум два ребра) и 10 графов с кол-вом рёбер $< \frac{5*4}{2} = 10$.

То есть итоговая сумма у нас получается всяко <150, причём округлял я всё довольно грубо, так что оценка весьма груба.

И так, в таком случае нам может подойти 60 полных графов на 5и вершинах.

Давайте из 30и графов удалим 3 вершины, тогда у нас останется 30 графов с одним ребром, а из остальных графов удалим по 2 вершины, тут мы будем иметь 30 треугольников, в каждом из которых по 3 рёбра. И так в сумме мы получаем всего 120 рёбер <150.

Д) Ну вот мы и подобрались к случаю с 50ю связными графами на 6и вершинах.

Из аналогичных соображений они должны быть исключительно полными.

Действительно. Если мы из 25и графов удалим по 4 вершины у нас останется максимум 50 рёбер, из остальных 25и удаляем по 2 вершины, осталось 25 графов на 4 вершины, причём количество рёбер в каждом из которых < 4, то есть всего вершин в этих графах снова < 150.

Или аналогично с симметрией.

И так, для 50и полных графов на 6и вершинах видно, что уже, как ни удаляй 150 вершин, всяко получится $\geq$ 150 рёбер, причём 150 достигается при удалении по 3 вершины из каждого графа, тогда остаётся 50 треугольников, в каждом по три ребра. Как бы мы по-другому рёбра не удаляли, меньше мы никак не получим.

И так, количество рёбер в 50и полных графах на 6и вершинах = $\left(\frac{6*5}{2}\right) * 50 = 750$.

Ну и очевидно, что с ростом кол-ва вершин кол-во рёбер будет так же расти, следовательно это минимальный вариант.

Ответ: 750.

№7

На самом деле условием задачи задаётся абелева группа. Действительно, она обладает всеми свойствами:

1) Коммутативность ($a \neq b = b \neq a$)

2) Ассоциативность ($a \neq (b \neq c) = (a \neq b) \neq c$)

3) А наличие обратного и нейтрального элемента нам обещает условие про то, что найдётся такое c, что $a \neq c = b$ и $a \neq c = b \neq c$.

Найдем такое c', что $c \neq c' = e$, где e – нейтральный элемент относительно ~~суперумножения~~. Домножим обе части суперравенства $a \neq c = b \neq c$ на c', тогда получим:

$a \neq c \neq c' = b \neq c \neq c'$

$a \neq e = b \neq e \Rightarrow a = b$. Итоговое равенство справедливо потому, что e - нейтральный элемент

№4. До ...