Задача 2.

Перепишем систему:

$$\begin{cases} x = y(3-y)^2 \\ y = x(3-x)^2 \end{cases}$$

Сделаем замену a=x-2, b=y-2 и перепишем систему с учётом замены:

$$\begin{cases} a+2 = (b+2)(1-b)^2 \\ b+2 = (a+2)(1-a)^2 \end{cases} \quad (1)$$

Или, если её преобразовать, выйдет такая система:

$$\begin{cases} a = -2 + b(1-b)^2 + 2(1-b)^2 \\ b = -2 + a(1-a)^2 + 2(1-a)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b(1-b)^2 + 2((1-b)^2 - 1) \\ b = a(1-a)^2 + 2((1-a)^2 - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b(1-b)^2 + 2(b^2 - 2b) \\ b = a(1-a)^2 + 2(a^2 - 2a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b(1-b)^2 + 2b(b-2) \\ b = a(1-a)^2 + 2a(a-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b((1-b)^2 + 2b - 4) \\ b = a((1-a)^2 + 2a - 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b(b^2 - 3) \\ b = a(a^2 - 3) \end{cases}$$

Заметим, что если подставить в первое и во второе уравнение системы -a вместо b и -b вместо a, то получится равносильная система:

$$\begin{cases} -b + 2 = (-a+2)(1+a)^2 \\ -a + 2 = (-b+2)(1+b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - b = 2(1+a)^2 - a(1+a)^2 \\ 2 - a = 2(1+b)^2 - b(1+b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 - 2(1+a)^2 + a(1+a)^2 \\ a = 2 - 2(1+b)^2 + b(1+b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2(-2a - a^2) + a(1+a)^2 \\ a = 2(-2b - b^2) + b(1+b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a(2+a) + a(1+a)^2 \\ a = -2b(2+b) + b(1+b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a(-2(2+a) + (1+a)^2) \\ a = b(-2(2+b) + (1+b)^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a(-4 - 2a + a^2 + 2a + 1) \\ a = b(-4 - 2b + b^2 + 2b + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a(a^2-3) \\ a = b(b^2-3) \end{cases}$$

Значит, если изобразить на плоскости aOb множество всех решений этой системы, то оно будет симметрично относительно прямой b=-a. Если перемножить первую и вторую строчки системы (1), то выйдет следующее уравнение:

$$(a+2)(b+2) = (a+2)(b+2)(a-1)^2(b-1)^2$$

Любое решение системы является и решением этого уравнения. Так как решения системы расположены симметрично относительно прямой b=-a, то если подставить в только что получившееся уравнение -a вместо b и -b вместо a, то любое решение системы будет являться и решением и этого уравнения тоже, значит множество всех решений системы (1) будет подмножеством всех решений этой системы:

$$\begin{cases} (a+2)(b+2) = (a+2)(b+2)(a-1)^2(b-1)^2 \\ (-b+2)(-a+2) = (-b+2)(-a+2)(-b-1)^2(-a-1)^2 \end{cases}$$

А эта система элементарно решается:

$$\begin{cases} (a+2)(b+2) = (a+2)(b+2)(a-1)^2(b-1)^2 \\ (2-a)(2-b) = (2-a)(2-b)(a+1)^2(b+1)^2 \end{cases}$$

Если a=-2, то единственное возможное значение b – тоже -2, если b=-2, то единственное возможное значение a – тоже -2, если a=2, то единственное возможное значение b – тоже 2, если b=2, то единственное возможное значение a – тоже 2, то есть можно выделить 2 решения: <u>a=b=-2</u> и <u>a=b=2</u>, иначе, если a≠-2, b≠-2, a≠2, b≠2, можно сократить первое уравнение на (a+2)(b+2) и второе уравнение на (2-a)(2-b):

$$\begin{cases} 1 = (a-1)^2(b-1)^2 \\ 1 = (a+1)^2(b+1)^2 \end{cases}$$

Если перемножить эти уравнения и перемножить эти уравнения «наискосок», то получится равносильная система уравнений:

$$\begin{cases} (a^2-1)^2(b^2-1)^2 = 1 \\ (a-1)^2(b-1)^2 = (a+1)^2(b+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2-1)(b^2-1) = \pm 1 \\ (a-1)(b-1) = \pm(a+1)(b+1) \end{cases}$$

(плюс-минусы не связаны)

$$\begin{cases} a^2b^2 - a^2 - b^2 = -1 \pm 1 \\ \left[\begin{array}{l} 2a + 2b = 0 \\ 2ab + 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab = -1 \\ a^2b^2 - a^2 - b^2 = -1 \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a + b = 0 \\ a^2b^2 - a^2 - b^2 = -1 \pm 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab = -1 \\ a^2 + b^2 = 2 \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -a \\ a^2a^2 - a^2 - a^2 = -1 \pm 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} ab = -1 \\ a^2 + b^2 + 2ab = 2 \pm 1 - 2 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -a \\ a^4 - 2a^2 = -1 \pm 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} ab = -1 \\ (a+b)^2 = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -a \\ \left[\begin{array}{l} a^4 - 2a^2 = 0 \\ a^4 - 2a^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} ab = -1 \\ a + b = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -a \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \pm\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b = -\dfrac{1}{a} \\ a - \dfrac{1}{a} = \pm 1 \end{cases} \\ a = 0; b = 0 \\ a = \pm\sqrt{2}; b = \mp\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b = -\dfrac{1}{a} \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - a - 1 = 0 \\ a^2 + a - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \\ a = 0; b = 0 \\ a = \pm\sqrt{2}; b = \mp\sqrt{2}\end{array}\right.$$

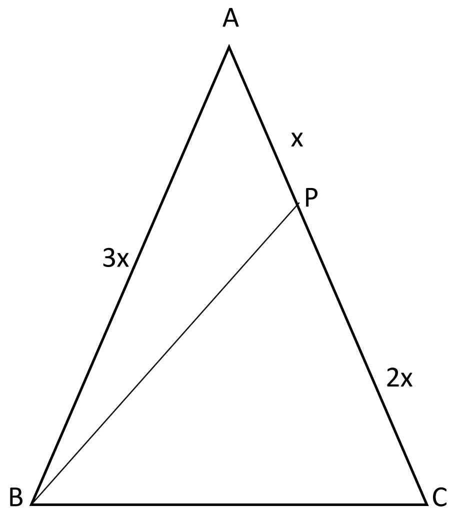
$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; b = -\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};\ b = -\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ a = \pm\sqrt{2}; b = \mp\sqrt{2} \\ a = 0; b = 0 \end{array}\right.$$

Если подставить любое из этих решений или решений a=b=-2 и a=b=2 в систему (1), то получаются верные равенства. Очевидно, что рациональным значениям переменных x и y соответствуют рациональные значения a и b, а рациональным значениям a и b соответствуют рациональные значения x и y. 6 из этих 9 решений не являются рациональными, что противоречит условиям задачи, остаются только решения a=b=-2, a=b=0 и a=b=2, которым соответствуют следующие значения x и y: x=y=0, x=y=2 и x=y=4, значит сумма x+y может принимать только значения 0, 4 и 8.

Ответ: {0; 4; 8}.

Задача 3.

Рисунок:




У треугольников APB и BPC совпадают высоты из вершины B, а основания отличаются в 2 раза, значит их площади тоже различаются в 2 раза, значит площадь треугольника ABC в 3 раза больше треугольника APB, а площадь треугольника APB легко выражается через x с помощью формулы Герона:

$$S_{\Delta ABP} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(2x+0.5)(x+0.5)(-x+0.5)(2x-0.5)}$$

Так как квадратный корень – монотонно возрастающая функция, то максимум этой площадь будет при том же x, при котором будет максимум функции f=$(2x+0.5)(x+0.5)(-x+0.5)(2x-0.5)$. Максимума она достигнет при равной нулю производной. То есть, нужно найти значение x, при котором f'(x)=0.

$$f'(x) = 0$$

$$\left((2x+0.5)(x+0.5)(-x+0.5)(2x-0.5)\right)' = 0$$

$$(-4x^4 + 1.25x^2 - 0.0625)' = 0$$

$$-16x^3 + 2.5x = 0$$

$$-16x(x + \frac{\sqrt{10}}{8})(x - \frac{\sqrt{10}}{8})$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{10}}{8} \\ x = -\frac{\sqrt{10}}{8} \end{array}\right.$$

Коэффициент при $x^4$ в f(x) отрицательный, значит f(x) возрастает до $x = -\frac{\sqrt{10}}{8}$, затем убывает до $x = 0$, возрастает до $x = \frac{\sqrt{10}}{8}$ и убывает дальше, следовательно точки минимума – это $x = \frac{\sqrt{10}}{8}$ и $x = \frac{\sqrt{10}}{8}$, но x – это длина стороны треугольника, значит он не может быть отрицательным, значит остаётся только один вариант: $x = \frac{\sqrt{10}}{8}$. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta ABP} = 3\sqrt{(2x+0.5)(x+0.5)(-x+0.5)(2x-0.5)}$$
$$= 3\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{10}}{8}+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{10}}{8}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{10}}{4}-\frac{1}{2}\right)} = 3\sqrt{\frac{9}{256}} = \frac{9}{16}$$

Ответ: 0.5625.