№1

Существует. У меня если $y = f(x)$, то $x \to y$

Заметим, что если $x \to a \to x^2$, то вообще говоря будет такая цепочка

$$x \to a \to x^2 \to a^2 \to x^4 \to a^4 \ldots \to x^{2^k} \to y^{2^k}$$

Разобьем натуральный ряд на след цепочки:

$$1 \to 1 \to 1 \to 1 \ldots$$

$$2 \to 3 \to 2^2 \to 3^2 \to 2^4 \to 3^4$$

Далее упорядочим простые числа по возрастанию, и под ними напишем упорядоч. по возрастанию составные числа, не являющимися квадратами:

5	7	11	13	17	19	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
6	8	10	12	14	15	...
5^2						

И продолжим эти цепочки. как мы сказали в начале

Ясно что ~~ни одна такая~~ не будет совпадающих элементов: если в начале $a = b^k$ то $a^{2^x} \neq b^{2^y}$, т.к $b^{k \cdot 2^x} \neq b^{2^y}$ при $k = \frac{2^y}{2^x}$, а если $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots$

то 1. к возвед степень не меняет отношения: то $\alpha_1 : \alpha_2 \ldots \alpha_n = \beta_1 : \beta_2 \ldots \beta_n$, тогда либо м.п. совпадают (чего нет) либо ~~второй~~ 1 явл-ся ст другого, что так, что разобрал.

№2

Пусть k чисел спустим с первой на вторую строку, тогда и со второй на первую поднимем k чисел. Остальные $10-k$ числа можно безболезненно переставливать внутри своих строк

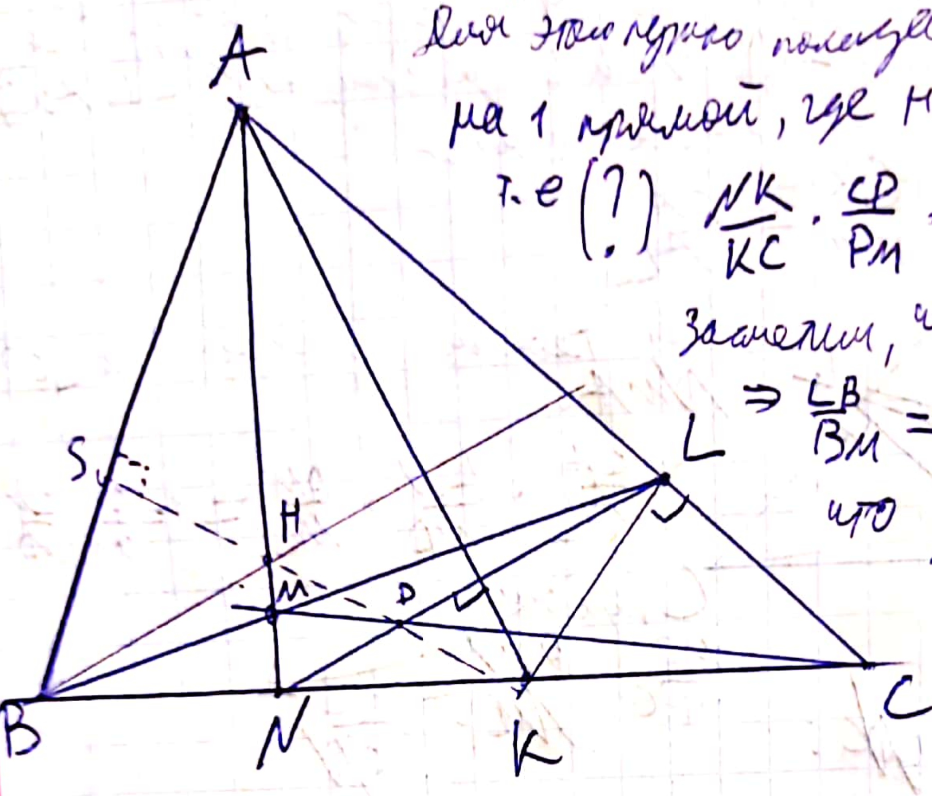
поскольку $k \in [0; 10]$, то всего получается $\sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i} \cdot \left((10-i)!\right)^2$

(квадрат, поскольку ~~столбца~~ строки 2) и в каждой по $10-i$ символов.

№3 Докажем, что $\angle ASD$ прям.

Для этого нужно показать, что K, P, H лежат на 1 прямой, где H - ортоцентр $\triangle ABN$,

т.е $(?)\ \frac{NK}{KC}\cdot\frac{CP}{PM}\cdot\frac{MH}{HP} = 1$ (т. менелая)



Заметим, что $BH \parallel NL \perp AK \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{LB}{BM} = \frac{NH}{HM}$. Тогда проверим, что $\frac{NK}{KC}\cdot\frac{CP}{PM}\cdot\frac{MB}{BL} = 1\ (?)$

(1)

Из т. менелая $\triangle LMP$ и прямой BNC: $\frac{LB}{BM}\cdot\frac{MC}{CP}\cdot\frac{PN}{NL} = 1$

$\left(\frac{MB}{BL}\cdot\frac{CP}{CM}\cdot\frac{NL}{PN} = 1\right.$ (2) чтобы (1) = (2) нужно, что

~~$\frac{NK}{KC}\cdot\frac{CP}{PM} = \frac{CP}{PM}\cdot\frac{NL}{PN}$ (?) т.е~~

~~Запишем т. менелая $\triangle LPN$ и прямой NMA~~:

$\frac{CP}{CM}\cdot\frac{LN}{LP} = \frac{CP}{PM}\cdot\frac{NK}{KC}$, т.е $(?)\ \frac{PM}{MC}\cdot\frac{CK}{KN}\cdot\frac{NL}{LP} = 1$

но $\frac{NK}{KC} = \frac{NA}{AC} \Rightarrow (?)\ \frac{PM}{MC}\cdot\frac{CA}{AN}\cdot\frac{NL}{LP} = 1$, что

явл-ся т. менелая $\triangle CPL$. и прямой NMA

ч.т.д.

№5

Шар шел через точку K 7 раз и одна из прямых — прямая XY. В $\triangle AXY$ выберем меньший угол и обозначим его за $\alpha \le 60^\circ$ ($\angle AXY$). Тогда из соображений равенства углов в треугольнике с углом 60° может быть произвольно в разных ориентированных углов между стороной AB и прямыми, по которым шар проходил:

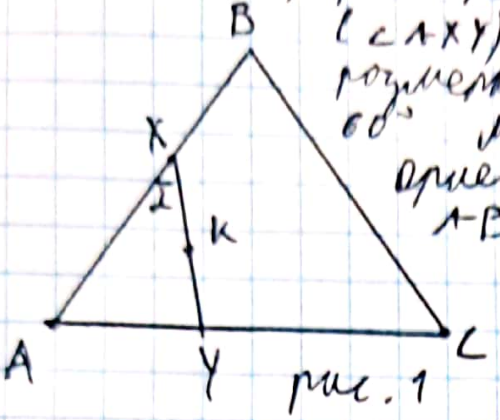
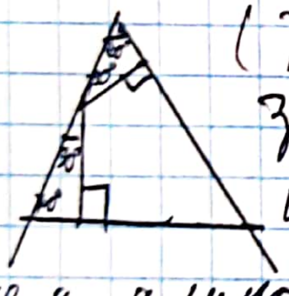


рис. 1

$\alpha;\ 60-\alpha;\ 60+\alpha;\ 120-\alpha;\ 120+\alpha;\ 180-\alpha.$

6 прямых, а через K прошло 7 прямых $\Rightarrow$ через 1 из прямых шар пройдет 2 раза. Заметим, что шар пойдет по этой прямой с той же стороны, что и в первый раз, иначе он в какой-то момент отразился, т.е. 1 из углов стал 90°. Но тогда $\alpha = 30^\circ$ (а для него все так как на рисунке 2



(Идет только по двум прямым) и там зацикливается). А для остальных углов шар прошел через точку K через 1 и ту же прямую два раза $\Rightarrow \exists$ цикл, начинающийся с этой прямой, по которому шар будет кататься, т.е. он пройдет через K еще бесконечное число раз.

№ 8

Если в одной одной группе из 150 вершин (половине) не менее 150, то в другой тоже не менее 150 р.
Значит ребер как минимум 300.
Пример на 300: 300 замкнутых петель.

 . тогда каждой вершине соответствует ребро – петля.

№7

Предположим противное, т.е. $a \neq b$

тогда $\exists\, d$, такое, что $a \# d = b$

Тогда $a \# c = (a \# d) \# c = (a \# c) \# d$

$a \# c = k$

Тогда $\exists\, d$ такое, что $k \# d = k$

Докажем, что такое d единственно для всех чисел. Если это не так, то $\exists\, x$ и d_1 такие, что $x \# d_1 = x$; тогда $(k \# x) \# d = (k \# x) \# d_1 = k \#$

т.е для числа $k \# x$ $\exists$ 2 числа, ~~дающ~~ при операции на них дающий 1 и тот же результат. $\Rightarrow d_1 = d$. т.е $a \# d = a = b$

ч.т.д