Второй открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.

Май 2022.

Задачи и решения.

Олимпиадные школы МФТИ во второй раз провели открытый турнир по математике для школьников старших классов. Цель турнира – приобщить как можно большее количество школьников со всей России к размышлениям над сложными и красивыми математическими задачами, показать, что математика не ограничивается школьными или даже вузовскими учебниками, а задачи с простой формулировкой могут иметь очень сложные и совершенно неожиданные решения.

Мы публикуем задачи вместе с решениями. Надеемся, что вы получили от них такое же удовольствие, как и мы.

При проверке мы руководствовались общими критериями, принятыми на математических олимпиадах. Любое верное решение, независимо от его длины или способа доказательства, оценивается в 7 баллов. Любой сколь угодно длинный текст, не содержащий продвижений по задаче, оценивается нулем баллов. Верный ответ без объяснений также всегда оценивается нулем баллов.

За арифметические ошибки, если они не влияют на ход решения, накладывается штраф в 1-2 балла. Логические ошибки, пропуски важных частей в доказательствах, штрафуются сильнее, вплоть до обнуления баллов за задачу.

Длинный перебор в комбинаторных задачах и длинный счет в геометрических задачах, если он не доведен до конца, продвижением не считается и оценивается нулем баллов. Разбор отдельных частных случаев, когда утверждение требовалось доказать в общем виде, также оценивается нулем баллов. В задачах типа "оценка+пример" отдельно баллы начисляются за каждую из частей доказательства (за оценку и за пример).

Команда отделения математики: Мещерин Илья, Короленков Василий, Гарькуша Максим, Барышев Игорь, Карасёв Алексей, Евтухов Александр, Мирошников Александр, Федотова Мария.

Второй открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.

Май 2022.

Младшая лига (8 класс).

1. Решите уравнение: $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = 0$. *(Задачу предложил Мещерин Илья)*

Ответ: нет решений.

Решение. Заметим, что $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 3 = (x^2 - x + 1)^2 + 2$. А значит, исходное уравнение эквивалентно уравнению $(x^2 - x + 1)^2 = -2$. Квадрат не может быть равен отрицательному числу, значит, уравнение не имеет решений.

Как можно было это заметить? Ну, например, можно было решить уравнение $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$, *у которого коэффициенты симметричны относительно среднего члена, и поэтому такое уравнение решается стандартным методом – заменой* $t = x + \frac{1}{x}$. *После этого стало бы видно, что многочлен в уравнении представляет собой полный квадрат.*

Можно было решить и с помощью общего метода решения уравнений 4й степени – метода Феррари, хотя здесь и нет в нем необходимости.

2. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Изначально все его клеточки белого цвета. Требуется закрасить некоторые клеточки черным цветом так, чтобы не нашлось ни одного прямоугольника со сторонами, проходящими по сторонам клеток, у которого все четыре угловые клетки окрашены в один и тот же цвет. При каком наибольшем n это возможно? *(Задачу предложил Короленков Василий)*

Ответ: При $n = 4$.

Решение. Сначала приведем пример такой раскраски для $n = 4$:

ЧБЧБ
БЧББ
ЧББЧ
БЧЧЧ

Теперь докажем, что уже при $n = 5$ осуществить такую раскраску не получится. Предположим, что получилось. Рассмотрим первую строку таблицы. В ней 5 клеток, каждая из которых либо черная, либо белая. По принципу Дирихле это означает, что найдется хотя бы 3 одноцветных клетки. Без ограничения общности будем считать, что они черные (если бы они были белыми, то все дальнейшее рассуждение работает аналогично с заменой белого на черное и наоборот). Теперь будем рассматривать те 3 столбца таблицы, в которых находятся эти 3 черные клетки в первой строке.

Посмотрим на вторую строку. Всего существует $2^3 = 8$ способов раскрасить 3 клетки в 2 цвета, но те способы, где есть хотя бы две черные клетки, нам не подходят (иначе образуется прямоугольник из 4 черных клеток с первой строкой). Тогда остается всего 4 способа: БББ, ББЧ, БЧБ и ЧББ.

Заметим, что в каждой из строк 2–5 должен использоваться один из этих способов, но при этом нельзя использовать один и тот же способ дважды (ибо тогда очевидно образуется прямоугольник с одноцветными углами). Это значит, что все вышеперечисленные 4 способа должны быть использованы по одному разу. Но тогда неизбежно найдется прямоугольник с четырьмя белыми углами, например, из за строк БББ и ББЧ, стоящих одна над другой.

Противоречие, значит, такая раскраска невозможна.

3. Однажды в кошмарном сне Максиму приснилась теорема: если в 30-значном числе каждая цифра не меньше 5, а сумма 40-х степеней всех цифр делится на 143, то и само число делится на 143. Проснувшись, Максим решил выяснить, верное ли знание пришло к нему во сне. Выясните и вы, верна ли эта теорема. *(Задачу предложил Гарькуша Максим)*

С этой задачей случилась интересная история. После проверки работ мы поняли, что наш собственный ответ на эту задачу был неправильным из-за довольно тонкой логической ошибки. Так что мы сначала приведем ответ, который мы ожидали увидеть, и одно из возможных решений, приводящих к нему. А затем объясним логическую уловку и приведем другое решение, приводящее к противоположному ответу.

Ответ. Нет, неверна.

Решение. Рассмотрим 30-значное число 858858...858858. Оно делится на 143, так как 858 делится на 143. Если для этого числа верна теорема, то она должна быть верна и для числа 858858...858885, полученного из исходного перестановкой двух последних цифр. Но разность между этими числами равна 27, так что второе число не может делиться на 143. Значит, теорема неверна.

Как мы уже сказали, это оказалось неверным рассуждением. А на самом деле верен другой ответ, и вот решение, приводящее к нему. Мы поняли это, проверяя работу одного из участников, который единственным из всех сумел заметить логическую уловку и обосновать не тот ответ, который ожидался изначально.

Ответ. Да, верна.

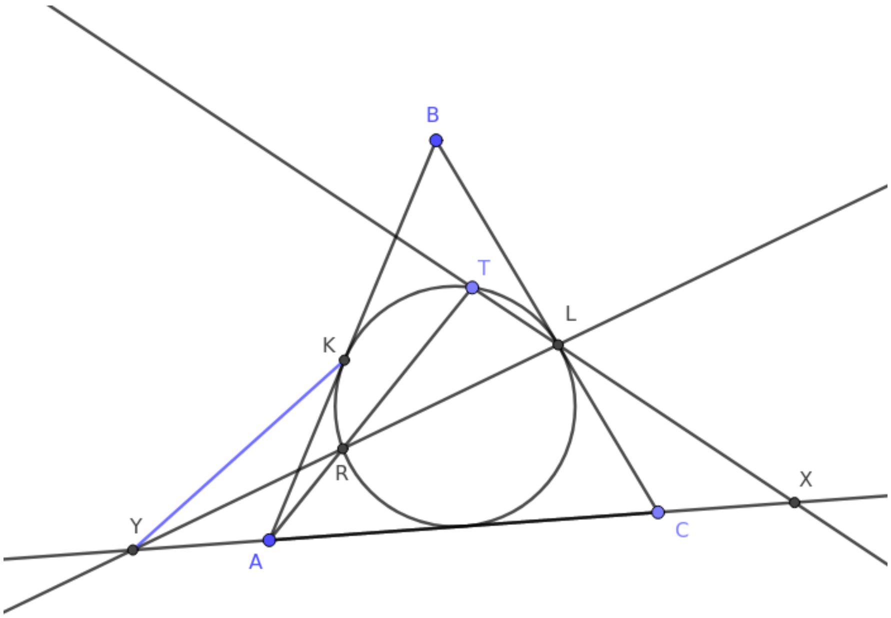
Решение. *(Автор решения – Волович Евгений.)* Поскольку все цифры числа лежат в диапазоне от 5 до 9, то ни одна из цифр, рассмотренная как число, не делится на 11. Тогда по малой теореме Ферма для любой из цифр верно $a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, а значит, и $a^{40} \equiv 1 \pmod{11}$. Но тогда сумма 40-х степеней всех цифр дает остаток 7 по модулю 11, а значит, не делится на 11 и уж точно не может делиться на 143.

Значит, чисел с таким свойством, которое требуется в теореме, не существует. Но тогда теорема имеет вид "любой элемент пустого множества делится на 143". А это, согласно правилам математической логики, верное утверждение, поскольку его отрицанием было бы "найдется такое число с описанным свойством, которое не делится на 143", что неверно, как мы показали.

Таким образом, теорема верна (хоть и бессмысленна).

Критерии. Мы решили давать полный балл как за ответ "да", так и за ответ "нет", если ответ был корректно обоснован, пусть даже с вышеописанной логической ошибкой.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точки K и L – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC соответственно. На меньшей дуге KL вписанной окружности выбрали точку T. Отрезок AT пересекает вписанную окружность в точке R. Прямые LT и LR пересекают прямую AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что середины отрезков AC и XY совпадают. *(Задачу предложил Барышев Игорь)*



Решение. Заметим, что т.к. треугольник ABC равнобедренный, $\angle YAB = \angle XCB$, а $KL \parallel AC$ ($KA = LC$, $AKLC$ – равнобокая трапеция). Значит, $\angle KLY = \angle AYL$ как накрест лежащие.

С одной стороны, дуга KR равна удвоенному углу $\angle KLR$, а с другой – удвоенному углу $\angle AKR$ (угол между касательной и хордой). Тогда $\angle AKR = \angle AYL$, откуда следует, что четырехугольник $KRYA$ – вписанный. Значит, $\angle YKA = \angle YRA$.

Заметим теперь, что $\angle CLX = \angle BLT = \frac{1}{2} \smile LT = \angle TRL = \angle YRA = \angle YKA$. Тогда треугольники $\triangle YKA$ и $\triangle XLC$ равны по стороне и двум углам, что означает, что $YA = CX$, откуда следует, что у отрезков YX и AC общая середина.

5. В компании n школьников, некоторые пары школьников являются друзьями. Всегда ли найдется такое натуральное число k, при котором школьники смогут выбрать себе каждый по натуральному числу так, что будет выполнено условие: произведение чисел, выбранных двумя школьниками, делится на k тогда и только тогда, когда эти школьники являются друзьями? (Числа, выбранные разными школьниками, необязательно должны быть различными.) *(Задачу предложил Короленков Василий)*

Ответ. Да, всегда найдется.

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины – это школьники. Каждую пару вершин-друзей соединим красными ребрами, а все остальные пары – синими ребрами.

Обозначим за m количество синих ребер. Каждому синему ребру присвоим простое число. Пусть это будут различные простые числа $p_1, \ldots, p_m$. Каждой вершине присвоим значение $f(A) = \dfrac{P^2}{P(A)}$, где P – произведение всех использованных простых чисел $p_1 p_2 \ldots p_m$, $P(A)$ – произведение всех простых чисел, лежащих на синих ребрах, начинающихся в точке A (если таких ребер у точки A нет, то считаем, что произведение всех элементов пустого множества равно 1). Наконец, нужное нам число $k = P^3$.

Проверим, что все условия выполняются. Если две вершины A и B соединены красным ребром, то $P(A)$ и $P(B)$ – взаимно простые числа, следовательно, $P \vdots P(A)P(B)$ и $f(A)f(B) = \dfrac{P^4}{P(A)P(B)} \vdots P^3$. Если же вершины и соединены синим ребром, которому соответствует простое число q, то ни $f(A)$, ни $f(B)$ на q^2 не делятся. Таким образом, произведение $f(A)f(B)$ не делится на q^3.

6. Визирь Самаркандского Падишаха очень беспокоится о том, чтобы его правитель всегда был весел и доволен. Поэтому он часто играет с ним в следующую игру: на полу в ряд он раскладывает 1001 напёрсток дном вниз, затем переворачивает один из напёрстков. Падишах может выбрать любой напёрсток, лежащий дном вверх, и перевернуть его соседей (если был дном вверх – становится дном вниз, и наоборот). Падишах выигрывает, если сможет такими действиями перевернуть все напёрстки дном вверх. Какие из напёрстков может переворачивать Визирь первым ходом, чтобы его правитель имел возможность победить? *(Задачу предложил Гарькуша Максим)*

Ответ. Только 501-й по счету наперсток (т.е. наперсток в середине ряда).

Решение. Сначала покажем, как Падишаху победить, если первым ходом был перевернут 501-й наперсток. Для этого ему нужно выбирать наперстки в следующем порядке: 501; затем 500, 502; затем 499, 501, 503; затем 498, 500, 502, 504; и так далее.

При первом "проходе", после выбора 501-го наперстка перевернутыми окажутся наперстки 500, 501 и 502. Далее, при втором проходе, после выбора 500-го перевернутыми окажутся 499, 500, 502. После выбора 502-го окажутся перевернутыми все наперстки с 499 по 503 включительно.

После третьего прохода будут перевернуты все наперстки с 497 по 505, после четвертого – с 495 по 507, и так далее. Ясно, что, продолжая такие действия, Падишах сможет в итоге перевернуть все наперстки с 1-го по 1001-й.

Теперь докажем, что при выборе Визирем на первом ходе любого иного наперстка, кроме среднего, Падишах не сможет победить. Для этого поставим в соответствие каждой конфигурации наперстков некоторую числовую величину. Пусть в данный момент перевернуты наперстки с номерами a_1, ..., a_k, где числа a_1, ..., a_k записаны в порядке возрастания (а остальные наперстки не перевернуты). Тогда численным значением такой конфигурации наперстков мы назовем величину $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{k+1}a_k$.

Посмотрим, как может меняться эта величина при разрешенных операциях. Рассмотрим случай, когда выбирается не крайний наперсток (не 1-й и не 1001-й). Если оба его соседа были не перевернуты, то соответствующее нашему наперстку слагаемое a_i поменяет знак, зато с противоположным знаком добавятся слагаемые $a_i - 1$ и $a_i + 1$. Это значит, что общая сумма не поменяется. Если же оба соседа были перевернуты, то, наоборот, слагаемые $a_i - 1$ и $a_i + 1$ исчезнут, зато с противоположным знаком добавится слагаемое a_i, то есть сумма опять не поменяется.

Если левый сосед (сосед с меньшим номером) был перевернут, а правый нет, то пропадет слагаемое $a_i - 1$, слагаемое a_i поменяет знак и появится слагаемое $a_i + 1$ с другим знаком: $(a_i - 1) - a_i$ перейдет в $a_i - (a_i + 1)$. Общая сумма снова не поменяется. Если же, наоборот, правый сосед был перевернут, а левый нет, то выражение $a_i - (a_i + 1)$ перейдет в выражение $(a_i - 1) - a_i$. Общая сумма вновь не поменяется.

Теперь рассмотрим случай, когда выбираются крайние наперстки. Пусть выбирается первый наперсток. Если его сосед был перевернут, то вместо $1-2$ в начале суммы будет просто 1, а вся дальнейшая сумма поменяет знак, то есть и вся сумма поменяет знак. Если сосед был не перевернут, то вместо 1 в начале суммы станет $1-2$, а вся дальнейшая сумма поменяет знак, то есть вновь вся сумма поменяет знак.

Наконец, рассмотрим случай, когда выбирается последний наперсток. Аналогично разобрав два варианта (либо сосед был перевернут, либо нет), мы получим, что в этом случае сумма всегда изменяется на 1002.

Итак, численное значение конфигурации при разрешенных Падишаху операциях либо не меняется, либо меняет знак, либо меняется ровно на 1002. А значит, остаток от деления этого значения на 501 является инвариантом. Но в конечной конфигурации (когда все наперстки перевернуты) численное значение будет равно $1-2+3-4+5-6+...+1001 = 501$, то есть будет делиться на 501. А значит, и в начальной конфигурации численное значение должно делиться на 501. То есть если Визирь первым ходом перевернет любой наперсток, кроме 501-го, Падишах не выиграет.

7. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$. Найдите минимально возможное значение выражения $2a^3 + 3b^3 + 4c^3$. *(Задачу предложил Мещерин Илья)*

Замечание. Если вы учитесь на 2 курсе МФТИ, то для вас это должно быть стандартной задачей. Тут потребуется владение частными производными, чуть-чуть знаний из линейной алгебры, а алгоритм решения носит название "метод множителей Лагранжа". Разумеется, если бы вы правильно воспользовались этим методом, мы бы засчитали такое решение. Но здесь мы покажем, как решить эту задачу без использования производных и вообще без высшей математики.

Ответ. $\dfrac{12}{\sqrt{407}}$.

Решение. Пусть α, β, $\gamma \geqslant 0$ – произвольные числа. Тогда из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом следуют неравенства:

$$a^3 + a^3 + \alpha^3 \geqslant 3\alpha a^2;$$

$$\frac{3}{2}(b^3 + b^3 + \beta^3) \geqslant \frac{9}{2}\beta b^2;$$

$$2(c^3 + c^3 + \gamma^3) \geqslant 6\gamma c^2.$$

Сложим эти три неравенства, получим:

$$2a^3 + 3b^3 + 4c^3 + \alpha^3 + \frac{3}{2}\beta^3 + 2\gamma^3 \geqslant 3\alpha \cdot a^2 + \frac{9}{4}\beta \cdot 2b^2 + 2\gamma \cdot 3c^2.$$

В этом неравенстве достигается равенство тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия: $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Кроме того, по условию исходной задачи должно быть $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$.

Выберем α, β, γ такими, что $3\alpha = \frac{9}{4}\beta = 2\gamma = k \geqslant 0$ и $\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2 = 1$.

Последнее равенство можно переписать в виде $\left(\dfrac{1}{9} + \dfrac{32}{81} + \dfrac{3}{4}\right) k^2 = 1$.
Отсюда получаем

$$3\alpha = \frac{9}{4}\beta = 2\gamma = k = \frac{18}{\sqrt{407}}.$$

Далее получаем:

$$2a^3 + 3b^3 + 4c^3 + \left(\frac{6}{\sqrt{407}}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{8}{\sqrt{407}}\right)^3 + 2\left(\frac{9}{\sqrt{407}}\right)^3 \geqslant \frac{18}{\sqrt{407}}(a^2 + 2b^2 + 3c^2);$$

$$2a^3 + 3b^2 + 4c^3 + \frac{6}{\sqrt{407}} \geqslant \frac{18}{\sqrt{407}};$$

$$2a^3 + 3b^2 + 4c^3 \geqslant \frac{12}{\sqrt{407}}.$$

Этот минимум достигается при $a = \dfrac{6}{\sqrt{407}}$, $b = \dfrac{8}{\sqrt{407}}$, $c = \dfrac{9}{\sqrt{407}}$.

Второй открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.

Май 2022.

Средняя лига (9 класс).

1. Чтобы получить трехзначное число A, используется следующий алгоритм: из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 случайно выбираются три различные цифры, после чего они записываются без пробелов в порядке убывания. Трехзначное число B получается таким же образом, но с той разницей, что цифра 9 не может быть выбрана, то есть используются лишь цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. С какой вероятностью число A окажется строго больше числа B, если числа получены по вышеописанным правилам? *(Задачу предложил Мещерин Илья)*

Ответ: $\dfrac{37}{56}$.

Решение. Поскольку цифры в каждом числе записываются в порядке убывания, единственный возможный вариант использовать цифру 9 в числе A – это поставить ее на первое место.
Если число A начинается с цифры 9, то оно точно будет больше числа B. Вероятность этого равна количеству способов выбрать число A так, чтобы оно начиналось с цифры 9, деленному на общее количество способов выбрать число A. Общее количество способов выбрать A равно C_9^3 (т.к. надо выбрать 3 различных цифры из 9), а количество способов выбрать A, начинающееся с цифры 9, равно C_8^2 (потому что надо выбрать 2 цифры из оставшихся 8).
Итак, в $\frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{28}{84} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$ от всех случаев A точно будет больше B. Оставшиеся $1 - \frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{2}{3}$ от всех случаев состоят из тех случаев, когда оба числа используют лишь цифры от 1 до 8. При этом, ввиду симметрии, количество вариантов, когда $A > B$, будет равно количеству вариантов, когда $B > A$. Общее количество вариантов выбрать числа A и B будет равно $(C_8^3)^2$. Из них будет ровно C_8^3 вариантов выбрать эти числа так, что $A = B$. А значит, ввиду вышесказанного, число вариантов, когда $A > B$, будет равно

$$\frac{(C_8^3)^2 - C_8^3}{2} = \frac{(C_8^3)(C_8^3 - 1)}{2}.$$

А вероятность события, что $A > B$, при условии, что оба числа состоят лишь из цифр от 1 до 8, будет равна

$$\frac{(C_8^3)(C_8^3 - 1)}{2 \cdot (C_8^3)^2} = \frac{C_8^3 - 1}{2 \cdot C_8^3} = \frac{55}{2 \cdot 56} = \frac{55}{112}.$$

Итого, по формуле полной вероятности, общая искомая вероятность будет равна:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{55}{112} = \frac{37}{56}.$$

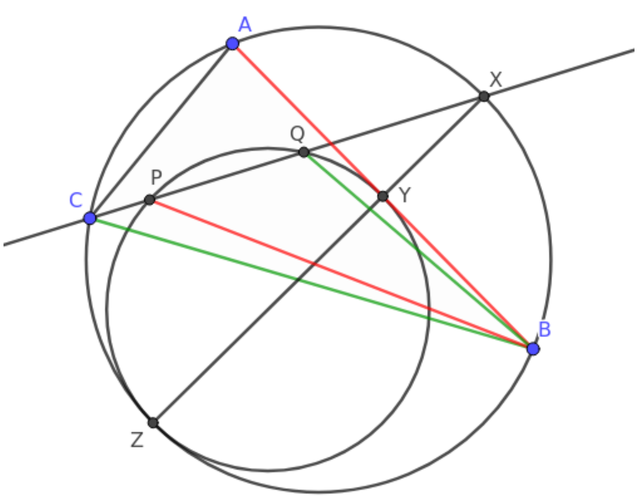
2. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... такая, что каждое натуральное число, кроме единицы, в ней встречается ровно один раз, а любые два соседних числа в этой последовательности **не** являются взаимно простыми? *(Задачу предложил Гаръкуша Максим)*

Ответ. Да, существует.

Решение. Будем строить эту последовательность шаг за шагом. На первом шаге напишем любое натуральное число, к примеру, число 2.

На каждом следующем шаге будем продолжать последовательность по такому правилу. Пусть последнее выписанное к данному моменту число равно a, а наименьшее невыписанное к данному моменту число равно b. Тогда выберем наименьшее натуральное k такое, что число kab будет больше любого из уже выписанных чисел. После чего продолжим нашу последовательность, дописав в нее числа kab и b.
Поясним подробнее, хоть это и необязательно для решения. На первом шаге $a = 2$, $b = 3$ и $k = 1$. Тогда после первой итерации получим последовательность 2, 6, 3. Теперь $a = 3$, $b = 4$, $k = 1$. После второй итерации получим последовательность 2, 6, 3, 12, 4. Теперь $a = 4$, $b = 5$ и $k = 1$. После третьей итерации получим 2, 6, 3, 12, 4, 20, 5. Теперь $a = 5$, $b = 7$ и $k = 1$. После четвертой итерации получим 2, 6, 3, 12, 4, 20, 5, 35, 7. И так далее.
Из построения ясно, что любые два соседних числа в построенной последовательности будут не взаимно просты. Действительно, у чисел a и kab всегда будет общий делитель a, а у чисел kab и b – общий делитель b.
Почему любое натуральное число встретится в этой последовательности? Потому что на каждой итерации мы добавляем в последовательность наименьшее из чисел, не выписанных к данному моменту. Это значит, что число n точно будет выписано не позже n-й итерации.
Почему никакое натуральное число не встретится более одного раза? Потому что на каждой итерации мы выписываем лишь числа, ранее не встречавшиеся в последовательности. В самом деле, kab всегда больше любого предыдущего члена последовательности, а b по своему определению выбрано так, что оно в последовательности ранее не встречалось. (Заметим, кстати, что использовать просто ab вместо kab нельзя: число ab может случайно совпасть с каким-то из чисел, ранее уже выписанных.)

3. Пусть Γ – описанная окружность треугольника ABC. Окружность Ω касается отрезка AB и касается Γ в точке, лежащей по ту же сторону от прямой AB, что и C. Биссектриса угла BCA пересекает Ω в двух разных точках P и Q. Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$. *(Задачу предложил Короленков Василий)*



Решение. Расположим точки, как показано на рисунке. Нетрудно убедиться, что при другом расположении задача решается аналогично.

Продлим биссектрису $\angle C$ до пересечения с огружностью Γ в точке X – середине дуги. Тогда согласно лемме Архимеда точки X, Y (точка касания AB с Ω) и Z (точка касания Ω и Γ) лежат на одной прямой. Тогда ZY – биссектриса $\angle AZB$.

Углы $\angle XBA$ и $\angle XZA$ равны как опирающиеся на одну дугу, а углы $\angle XZA$ и $\angle XZB$ равны, т.к. ZY – биссектриса. Поэтому $\triangle XYB \sim \triangle XBZ$, и $XB^2 = XY \cdot XZ$.

Рассмотрим степень точки X относительно окружности Ω: $XY \cdot XZ = XP \cdot XQ$. Значит, $XP \cdot XQ = XB^2$. Поэтому $\triangle XBP \sim \triangle XQB$, и значит, $\angle XBP = \angle XQB$.

$\angle XBP = \angle ABP + \angle XBA = \angle ABP + \angle XCA$;
$\angle XCA = \angle XCB$;
$\angle XQB = \angle BCQ + \angle QBC$ (внешний угол);

Тогда
$\angle ABP + \angle XCB = \angle XBC + \angle QBC$;
Отсюда $\angle ABP = \angle QBC$.

4. В бане 2022 комнаты, в каждой из которых может поместиться любое количество людей. В эту баню пришло k супружеских пар, в каждой из которых есть муж и жена. Некоторые мужчины знакомы друг с другом, и некоторые женщины знакомы друг с другом, причем два мужчины знакомы тогда и только тогда, когда их жены знакомы. Мужчины хотят, чтобы с ними в одной комнате были только незнакомые, а женщины – наоборот, хотят, чтобы с ними в комнате были только знакомые. При каком наибольшем k можно наверняка утверждать, что все они смогут распределиться по комнатам с учетом всех пожеланий, если ни в какой комнате нельзя одновременно находиться людям разного пола? *(Задачу предложил Короленков Василий)*

Ответ. При $k = 2021$.

Решение. Сначала докажем, что при $k = 2022$ возможна ситуация, когда все они не смогут распределиться по комнатам. Пусть пришло 2022 супружеских пары, где никто не знает никого (кроме своих супругов). Тогда женщинам понадобится хотя бы 2022 комнаты, и еще одна комната нужна будет для мужчин. То есть 2022 комнат не хватит.

Теперь докажем, что при $k = 2021$ они всегда смогут распределиться. Будем доказывать индукцией по n следующее утверждение: если пар $n-1$, а комнат n, то пары всегда смогут распределиться по комнатам. В частности, при $n = 2022$ получим требуемое.

База индукции: $n = 2$, и в баню пришла всего одна пара. Тогда мужчина просто пойдет в первую комнату, а его жена – во вторую.

Индукционный переход: пусть мы уже доказали, что $n-2$ пары всегда могут распределиться по $n-1$ комнатам. Докажем, исходя из этого, что $n-1$ пара всегда сможет распределиться по n комнатам.

Итак, пусть в баню пришло $n-1$ пар. Распределим первые $n-2$ из них по $n-1$ комнатам. Рассмотрим последнюю оставшуюся пару. Обозначим за p количество тех пар, с которыми эта пара знакома, и за m количество комнат, которые уже заняты мужчинами.

Если $m > p$, то найдется такая комната, занятая мужчинами, что все мужчины в этой комнате незнакомы с мужчиной из последней пары. Тогда он может пойти в эту комнату, а его жена – в оставшуюся пустую комнату номер n.

Если же $m \leqslant p$, то $n-2-p < n-1-m$. То есть количество пар, с которыми незнакома наша пара, меньше, чем количество комнат среди $n-1$, не занятых мужчинами. Значит, найдется такая комната среди первых $n-1$, не занятая мужчинами, что в ней все женщины – знакомые для женщины из последней пары. Пусть она тогда пойдет в эту комнату, а ее муж – в оставшуюся пустую комнату номер n.

Индукционный переход закончен.

5. Визирь Самаркандского Падишаха очень беспокоится о том, чтобы его правитель всегда был весел и доволен. Поэтому он часто играет с ним в следующую игру: на полу в ряд он раскладывает 1001 напёрсток дном вниз, затем переворачивает один из напёрстков. Падишах может выбрать любой напёрсток, лежащий дном вверх, и перевернуть его соседей (если был дном вверх – становится дном вниз, и наоборот). Падишах выигрывает, если сможет такими действиями перевернуть все напёрстки дном вверх. Какие из напёрстков может переворачивать Визирь первым ходом, чтобы его правитель имел возможность победить? *(Задачу предложил Гарькуша Максим)*

Ответ. Только 501-й по счету наперсток (т.е. наперсток в середине ряда).

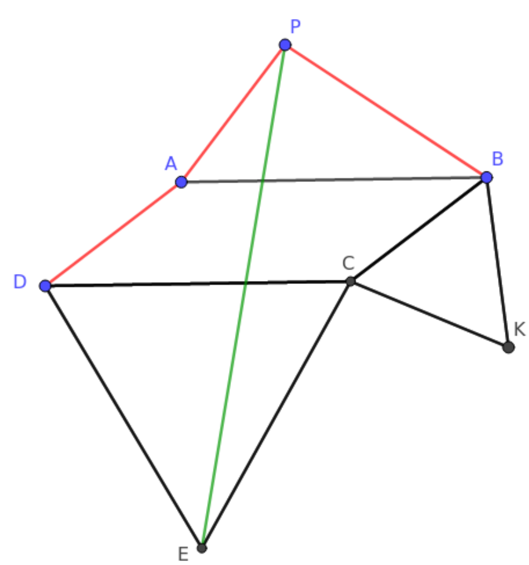
Решение. Смотри решение задачи 6 для 8 класса.

6. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2+2b^2+3c^2=1$. Найдите минимально возможное значение выражения $2a^3+3b^3+4c^3$. *(Задачу предложил Мещерин Илья)*

Ответ. $\dfrac{12}{\sqrt{407}}$.

Решение. Смотри решение задачи 7 для 8 класса.

7. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ наружу построен правильный треугольник CDE. На плоскости выбрана произвольная точка P. Докажите, что $AP+BP+AD \geqslant PE$. *(Задачу предложил Барышев Игорь)*



Решение. Построим равносторонний треугольник BKC на стороне BC внаружу параллелограмма. Легко убедиться, что по двум сторонам и углу между ними будут равны треугольники KCE и ADE. Тогда в силу равенства этих треугольников треугольник

AKE – равнобедренный с углом $\angle KEA = 60^\circ$, а значит, он равносторонний.

По теореме Помпею для равностороннего треугольника:

$$PK + PA \geqslant PE.$$

По неравенству треугольника для $\triangle PBK$

$$PB + BK \geqslant PA,$$

причем $BK = AD$. Поэтому $PB + BK = PB + AD \geqslant PA$.
Значит,

$$PE \leqslant PA + PK \leqslant PA + PB + AD.$$

Второй открытый турнир Олимпиадных школ МФТИ по математике.

Май 2022.

Старшая лига (10 класс).

1. Чтобы получить трехзначное число A, используется следующий алгоритм: из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 случайно выбираются три различные цифры, после чего они записываются без пробелов в порядке убывания. Трехзначное число B получается таким же образом, но с той разницей, что цифра 9 не может быть выбрана, то есть используются лишь цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. С какой вероятностью число A окажется строго больше числа B, если числа получены по вышеописанным правилам? *(Задачу предложил Мещерин Илья)*

Ответ: $\dfrac{37}{56}$.

Решение. Смотри решение задачи 1 для 9 класса.

2. В бане 2022 комнаты, в каждой из которых может поместиться любое количество людей. В эту баню пришло k супружеских пар, в каждой из которых есть муж и жена. Некоторые мужчины знакомы друг с другом, и некоторые женщины знакомы друг с другом, причем два мужчины знакомы тогда и только тогда, когда их жены знакомы. Мужчины хотят, чтобы с ними в одной комнате были только незнакомые, а женщины – наоборот, хотят, чтобы с ними в комнате были только знакомые. При каком наибольшем k можно наверняка утверждать, что все они смогут распределиться по комнатам с учетом всех пожеланий, если ни в какой комнате нельзя одновременно находиться людям разного пола? *(Задачу предложил Короленков Василий)*

Ответ: При $k = 2021$.

Решение. Смотри решение задачи 2 для 9 класса.

3. При каких натуральных n число $2^{n-1}+1$ делится на n? *(Задачу предложил Мирошников Александр)*

Ответ. Только при $n = 1$.

Решение. Сначала заметим, что n не может быть четным. Это так, поскольку число $2^{n-1}+1$ в таком случае нечетно, а нечетное число $2^{n-1}+1$ не может делиться на четное n.

Итак, n нечетно. Если $n = 1$, то $2^0 + 1 \,\vdots\, 1$, то есть $n = 1$ подходит.

Пусть n нечетно и больше 1. Обозначим $m = \|n-1\|_2$, то есть порядок вхождения числа 2 в разложение $n-1$ на простые множители. Тогда $n - 1 = 2^m k$, где k нечетно.

Пусть p – произвольный простой делитель n. Поскольку $2^{n-1} + 1$ делится на n, то оно делится и на p. Но $n - 1 = 2^m k$, так что $2^{2^m k} + 1 \,\vdots\, p$.

Обозначим $2^k = t$. Тогда $2^{2^m k} + 1 \,\vdots\, p$ переписывается в виде $t^{2^m} \equiv -1 \pmod p$. Возведем в квадрат, получим $t^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod p$. Это значит, что $\operatorname{ord}_p t$ (показатель числа t по модулю p) является делителем 2^{m+1}, но не является делителем 2^m. Но это значит, что $\operatorname{ord}_p t$ в точности равен 2^{m+1}.

Итак, $\operatorname{ord}_p t = 2^{m+1}$. Но t и p взаимно просты (t – степень двойки, а p нечетно), так что по малой теореме Ферма $t^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. А значит, по свойству показателя по модулю, $p-1 \vdots 2^{m+1}$.

Но p было произвольным простым делителем числа n. Значит, все простые делители числа n имеют вид $2^{m+1}a+1$ (при некоторых натуральных a). Но тогда и само число n имеет вид $2^{m+1}a+1$ для некоторого натурального a. А значит, $n-1 = 2^{m+1}a$ делится на 2^{m+1}.

Это противоречит выбору $m = \|n-1\|_2$ как наибольшей степени двойки, на которую делится $n-1$. Значит, случай $n > 1$ невозможен.

4. Действительные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2+z^2+\frac{9}{16}xy = 1$. Найдите максимально возможное значение выражения $xy+yz+xz$. *(Задачу предложил Мещерин Илья)*

Ответ. $\dfrac{12\sqrt{5}+8}{41}$.

Замечание. Если вы учитесь на 2 курсе МФТИ, то для вас это должно быть стандартной задачей. Тут потребуется владение частными производными, чуть-чуть знаний из линейной алгебры, а алгоритм решения носит название "метод множителей Лагранжа". Разумеется, если бы вы правильно воспользовались этим методом, мы бы засчитали такое решение. Но здесь мы покажем, как решить эту задачу без использования производных и вообще без высшей математики.

Решение. Пусть a – произвольное число из интервала $(0;1)$. Тогда из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом следуют неравенства:

$$a(x^2+y^2) \geqslant 2axy;$$

$$(1-a)x^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{(1-a)x^2\frac{z^2}{2}} = \sqrt{2(1-a)}xz;$$

$$(1-a)y^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{(1-a)y^2\frac{z^2}{2}} = \sqrt{2(1-a)}yz.$$

Сложим эти три неравенства. Получим:

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant 2axy + \sqrt{2(1-a)}(xz+yz).$$

Но по условию $x^2+y^2+z^2 = 1-\frac{9}{16}xy$. Тогда неравенство приобретает вид:

$$1 \geqslant \left(2a+\frac{9}{16}\right)xy + \sqrt{2(1-a)}(xz+yz).$$

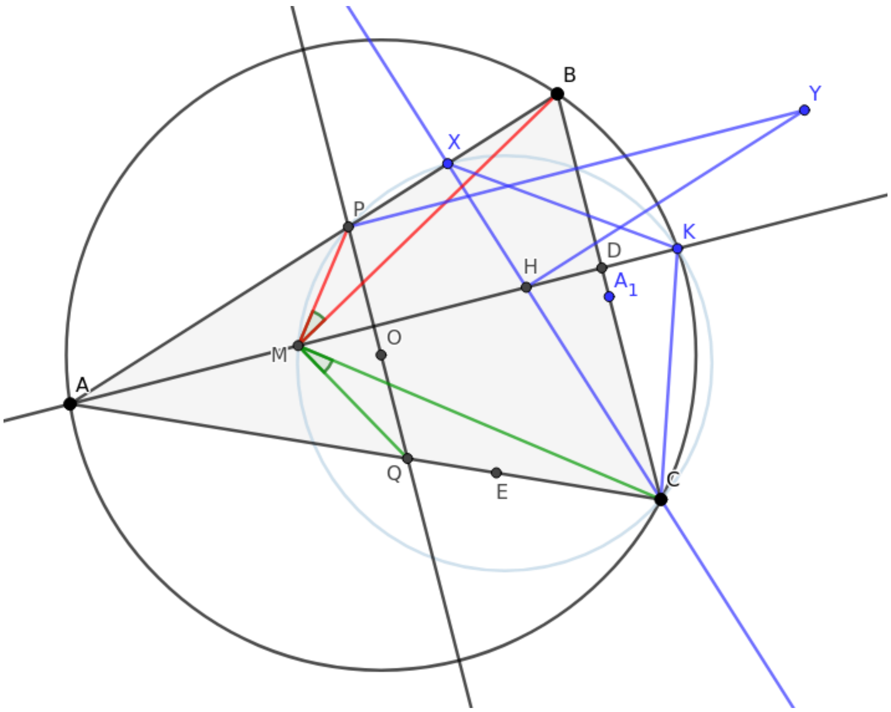
Выберем a так, чтобы выполнялось равенство $2a+\dfrac{9}{16} = \sqrt{2(1-a)}$. Решая квадратное уравнение относительно a и помня условие $a \in (0;1)$, находим $a = \dfrac{12\sqrt{5}-17}{32}$.

Подставим в предыдущее неравенство. Получим неравенство $1 \geqslant \dfrac{3\sqrt{5}-2}{4}(xy+yz+xz)$.

Отсюда $xy+yz+xz \leqslant \dfrac{4}{3\sqrt{5}-2} = \dfrac{12\sqrt{5}+8}{41}$.

В этом неравенстве достигается равенство, если во всех трех исходно записанных неравенствах достигалось равенство. А оно будет достигаться, если выполнены одновременно условия: $ax^2 = ay^2$; $(1-a)x^2 = \frac{z^2}{2}$ и $(1-a)y^2 = \frac{z^2}{2}$. Очевидно, что эти условия выполнимы. Значит, найденное нами значение $xy + yz + xz$ достижимо.

5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая, проходящая через центр O описанной окружности треугольника ABC параллельно BC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть M – середина AH. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMC$. *(Задачу предложил Барышев Игорь)*



На чертеже доп. построения изображены синим цветом, а интересующие нас два угла – красным и зеленым.

Решение. Докажем, что $\angle PMC = 90°$.

Пусть A_1 – середина BC. Тогда $OA_1 = \frac{1}{2}AH$ (расстояние от центра описанной окружности до стороны в 2 раза меньше, чем расстояние от вершины до ортоцентра). Пусть Y – точка, симметричная P относительно BC. Тогда $APYH$ – параллелограмм, поскольку отрезки AH и PY равны и параллельны.

Проведем высоту CX в треугольнике ABC. Тогда H лежит на ней, и $CH \perp HY$, то есть $\angle CHY = 90°$.

Пусть K – пересечение продолжения высоты AD с описанной окружностью треугольника ABC. Тогда $DH = HK$. Заметим, что при отражении CHY относительно BC точка C остается на месте, точка H переходит в D, а точка Y переходит в P. То есть угол CHY переходит в угол CKP. Значит, $\angle CKP = 90°$.

Итак, $\angle CKP = 90°$, а еще $\angle CXP = 90°$, т.к. CX – высота. Значит, четырехугольник $CKXP$ – вписанный.

Пусть в исходном треугольнике $\angle B = \beta$. Тогда $\angle BCX = 90° - \beta$.
Далее, $\angle BCK = \frac{1}{2} \smile BK = \angle BAK = 90° - \beta$.
Значит, $\angle XCK = \angle BCX + \angle BCK = 180° - 2\beta$. Тогда $\angle XPK = 180° - 2\beta$, и $\angle APK = 2\beta$.

Заметим, что XM – медиана прямоугольного треугольника XAH. Поэтому $\triangle XMA$ – равнобедренный, $\angle XMH = 2\angle XAM$. Но $\angle XAM = \angle BAD = 90° - \beta$. Значит, $\angle XMH = 180° - 2\beta$.

$\angle XMK = \angle XMH = 180° - 2\beta$, $\angle XPK = 2\beta$, $\angle XMK + \angle XPK = 180°$. Значит, четырехугольник $XKMP$ – вписанный.

Четырехугольники $CKXP$ и $XKMP$ вписанные, а значит, $XKCMP$ – вписанный пятиугольник. Но тогда $\angle PMC = \angle PXC = 90°$. Итак, мы доказали, что $\angle PMC = 90°$, как и заявляли в самом начале.

Абсолютно аналогично можно доказать, что $\angle BMQ = 90°$, проделав те же самые построения для высоты BE вместо высоты AD.

Но если $\angle BMQ = \angle PMC$, то, вычитая из них общий угол $\angle BMC$, получим $\angle PMB = \angle CMQ$, что и требовалось доказать.

6. Какое наибольшее количество клеток в квадрате 57×57 можно закрасить так, чтобы никакие 4 закрашенных клетки не были угловыми клетками некоторого прямоугольника? *(Задачу предложил Мещерин Илья)*

Ответ. 456.

Решение. Сначала докажем оценку. Пусть всего закрашено n клеточек. Если в какой-то строке закрашены клетки в столбцах i и j, то эта же пара столбцов не может быть закрашена ни в какой другой строке. Это значит, что каждая пара столбцов может быть "использована" не более одного раза. Всего пар столбцов существует $\frac{57 \cdot 56}{2}$.

Обозначим через a_1, ..., a_{57} соответственно количества клеточек, закрашенных в 1-й, ..., 57-й строках. Тогда в первой строке использовано $\frac{a_1(a_1-1)}{2}$ пар столбцов, ..., в 57-й строке использовано $\frac{a_{57}(a_{57}-1)}{2}$ пар столбцов.

По принципу Дирихле должно быть $\sum_{i=1}^{57} \frac{a_i(a_i-1)}{2} \leqslant \frac{57 \cdot 56}{2}$, иначе какая-то пара столбцов будет использована более одного раза. Это можно переписать как $\sum_{i=1}^{57} a_i(a_i - 1) \leqslant 57 \cdot 56$, или $\sum_{i=1}^{57}(a_i^2 - a_i) \leqslant 57 \cdot 56$.

Теперь вспомним, что $\sum_{i=1}^{57} a_i = n$. А значит, наше неравенство превращается в такое: $(\sum_{i=1}^{57} a_i^2) - n \leqslant 57 \cdot 56$, или $\sum_{i=1}^{57} a_i^2 \leqslant 57 \cdot 56 + n$.

Из неравенства о среднем квадратичном следует, что $\frac{\sum_{i=1}^{57} a_i^2}{57} \geqslant \left(\frac{n}{57}\right)^2$, то есть $\sum_{i=1}^{57} a_i^2 \geqslant \frac{n^2}{57}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все a_i равны.

Пусть $n = 57 \cdot 8 = 456$. Тогда неравенство о среднем квадратичном приобретает вид $\sum_{i=1}^{57} a_i^2 \geqslant \frac{57^2 \cdot 8^2}{57} = 57 \cdot 64$. Если при таком n сделать все a_i равными (то есть равными 8), то неравенство превратится в равенство. Исходное неравенство при таком n будет иметь вид $\sum_{i=1}^{57} a_i^2 \leqslant 57 \cdot 56 + 57 \cdot 8 = 57 \cdot 64$, и ввиду вышесказанного, мы можем удовлетворить этому неравенству в единственном случае: когда в нем достигается равенство, то есть в каждой строке закрашено ровно 8 клеток.

Значит, при $n = 456$ раскраска если и возможна, то лишь в случае, когда в каждой строке закрашено ровно 8 клеток. В любом ином случае левая часть неравенства была бы больше правой.

Почему раскраска невозможна при $n > 456$? Пусть закрашено $n > 456$ клеток. Вновь запишем требуемое неравенство $\sum_{i=1}^{57} a_i^2 \leqslant 57 \cdot 56 + n$. Будем произвольно выбирать любую закрашенную клетку и перекрашивать ее обратно в белый до тех пор, пока закрашенных клеток не станет ровно 456. После каждого такого действия левая часть неравенства будет уменьшаться хотя бы на 1, а правая – ровно на 1. В конце мы либо придем к равенству $57 \cdot 64 = 57 \cdot 56 + 456$, либо к неравенству, где левая часть больше правой. Во втором случае очевидно, что исходная раскраска не могла быть правильной, а в первом случае среди a_i не должно было быть единиц, то есть при каждом нашем ходе левая часть неравенства уменьшалась строго более чем на 1. Это означает, что в исходном неравенстве при $n > 456$ левая часть была больше правой, то есть такая раскраска с соблюдением условий невозможна.

Покажем теперь, как построить раскраску для $n = 456$. Для этого рассмотрим конечную проективную плоскость порядка 7. Как известно, такая проективная плоскость существует, т.к. конечные проективные плоскости порядка p существуют для любого простого p. Также известно, что на такой плоскости будет ровно $7^2 + 7 + 1 = 57$ точек и столько же прямых, причем каждая прямая будет состоять из $7 + 1 = 8$ точек.

Пронумеруем эти 57 точек и 57 прямых. Будем закрашивать клеточки по следующему правилу: в строке номер i закрасим клеточку номер j, если и только если точка номер j принадлежит прямой номер i. Тогда у нас окажется ровно 8 закрашенных клеток в каждой строке, а всего $57 \cdot 8 = 456$ закрашенных клеток.

Предположим, что какие-то 4 закрашенных клетки образуют прямоугольник. Пусть они оказались в строках a и b, и пусть это столбцы x и y. Но тогда из нашего построения следует, что через две точки x, y конечной проективной плоскости проходят две различные прямые (a и b). А это противоречит аксиомам проективной плоскости (да и аксиомам обычной плоскости тоже). Значит, предположение неверно. Пример построен.

7. Однажды Мудрец с Востока и Мудрец с Запада встретились под скалой, на которой было начертано некое положительное число c. Западный Мудрец, увидев число на скале, задумал некое натуральное число от 1 до M (некоторого известного обоим мудрецам большого числа) и предложил Восточному Мудрецу угадать его. Для этого Восточный Мудрец должен был высечь список из некоторого количества n вопросов к Западному Мудрецу на скале рядом, после чего Западный Мудрец ответил бы на них. Однако Западный Мудрец имеет право ответить неверно на не более чем cn вопросов. При каком наибольшем c Восточный Мудрец гарантированно сможет найти такое n и подобрать такие n вопросов, чтобы отгадать задуманное число? *(Задачу предложил Гарькуша Максим)*

Ответ. При $c = \dfrac{1}{4}$.

Решение. Пусть Западного Мудреца зовут Илья, а Восточного Мудреца зовут Максим.

Сначала будем играть за Максима. Пусть $c = \frac{1}{4}$. Покажем, как надо действовать, чтобы при любом M суметь отгадать загаданное Ильёй число.

Выберем $n = 2^M - 2$. Про каждое из $2^M - 2$ непустых и не полных подмножеств множества $\{1, ..., M\}$ зададим вопрос: "верно ли, что загаданное число лежит в данном множестве"?

Предположим, что по ответам мы оказались не в состоянии понять, какое число загадано. Это означает, что существует два различных числа $a, b \in \{1, ..., M\}$, таких, что данные нам ответы допускают и такой исход, что загадано число a, и такой, что загадано число b.

Но существует ровно 2^{M-1} множеств, в которых содержится ровно одно из чисел a, b. Для каждого из этих множеств при одном из загаданных чисел a, b ответ Ильи будет неверным. Рассмотрим то из чисел a, b, для которого неверных ответов среди этих 2^{M-1} ответов больше. Значит, их хотя бы половина от 2^{M-1}, то есть хотя бы 2^{M-2}. Но $2^{M-2} > 2^{M-2} - \frac{1}{2} = (2^M - 2)/4$, то есть количество неверных ответов для этого числа больше, чем четверть от общего числа вопросов. Противоречие. Значит, данные Ильёй ответы допускают максимум одно из чисел a, b, и у нас нет неоднозначности.

Теперь будем играть за Илью. Пусть $c > \frac{1}{4}$. Покажем, что при некотором M и при некотором загаданном числе мы сможем своими ответами запутать Максима, какие бы он ни задал вопросы.

Пусть Максим выбрал какое-то n и написал свои n вопросов. Посмотрим на первый из этих вопросов. Посчитаем количество таких (неупорядоченных) пар $(a, b) \in \{1, ..., M\}^2$, что верные ответы на первый вопрос для a и b различны. Пусть k – количество способов выбрать число a так, чтобы верным ответом было "да", тогда $M - k$ – это количество способов выбрать b так, чтобы верным ответом было "нет". Значит, количество пар чисел (a, b), для которых верные ответы на вопрос различны, будет равно $k(M - k)$. Это количество максимально, когда $k = \frac{M}{2}$. То есть количество пар чисел, для которых верные ответы на первый вопрос различны, не превосходит $\frac{M^2}{4}$. Аналогичное утверждение верно про каждый из n вопросов.

Выпишем для каждого вопроса все пары чисел, для которых верные ответы на этот вопрос различны. Тогда общее количество пар с учетом повторов, которые мы выпишем, будет не более $\frac{nM^2}{4}$.

Предположим, что среди выписанных нами с учетом повторов пар каждая возможная пара повторяется хотя бы $2cn$ раз. Но всего возможных пар ровно $\frac{M(M-1)}{2}$. Тогда всего должно быть выписано хотя бы $\frac{M(M-1)}{2} \cdot 2cn = cnM(M - 1)$ пар. А у нас выписано не более $\frac{nM^2}{4}$ пар. Значит, если M таково, что $cM(M - 1) > \frac{M^2}{4}$, то найдется такая пара, которая была выписана менее $2cn$ раз.

Пусть это пара (a, b). Тогда на тех вопросах, на которых она не была выписана, мы дадим верный ответ. На тех же (менее чем $2cn$) вопросах, на которых она была выписана, мы в cn случаев дадим ответ, верный для a, а в оставшихся случаях дадим ответ, верный для b. Тогда Максим не сможет понять, загадали мы a или b, поскольку для любого из них доля неверных ответов будет не более c.

Итак, если $c > \frac{1}{4}$, то найдется такое M (а именно, такое, что $cM(M - 1) > \frac{M^2}{4}$), при котором возможно загадать такое число, что какие бы Максим ни написал вопросы, он не сможет по ответам однозначно восстановить задуманное число. Что и требовалось доказать.